



TITLE:

情報処理システムに現われる確率過程の研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

吉田, 裕

CITATION:

吉田, 裕. 情報処理システムに現われる確率過程の研究. 京都大学, 1971, 工学博士

ISSUE DATE:

1971-09-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k1138>

RIGHT:

情報処理システムに現われる
確率過程の研究

古 田 裕

情報処理システムに現われる 確率過程の研究

吉 田 裕

DOC

1971

2

電気系

序 文

電子計算機を含む情報処理システムが数多く研究開発され、実用に供されている。単用の計算機、汎用の計算機、入出力装置もすべて計算センタに集中させたシステム、遠隔の端末装置を持つたシステム、多数の計算機間のデータ伝送も含むシステム等多種多様の情報処理システムが現存する。これらの情報処理システムにおける工学的諸問題の中に、確率過程の応用問題として取り上げることが適当な種々の問題がある。

情報処理システムの設計に関連しては、そのシステム構成と各装置の制御および操作に関する問題が起こつて来る。これはハードウェアばかりでなく、ソフトウェアとも密接に結びついた問題である。中央処理装置を中心とした中央処理系に関する問題、また入出力装置、端末装置に重点を置いた周辺系の問題、システム全体を巨視的に見た問題等に分けて考えることもでき、一種のトラヒック問題として捉えることができる。最終的には設備数算出等のシステム全体の低コスト化とシステムが提供できるサービスの程度とのバランスを取る問題となる。その前に、各種のトラヒック問題を取り上げ解決する必要がある。

一方、情報処理システムを利用する場合の問題として、むしろ応用プログラムと関連する問題もある。たとえば、モンテカルロ法、シミュレーションなどに関する問題である。

本研究では、まず物理的2進乱数を対象とし、その確率的な性質として出現確率と系列相関を考え、とくにその改善について検討する。多数の2進乱数源を組合せ論理回路の入力に接続し、その出力から改善された乱数列が得られること、およびその改善度を求める。

つぎに、情報処理システムにおけるトラヒック問題として、中央処理系における待ち合わせ問題およびシステム全体をモデル化した待ち合わせ問題を取り上げる。その1は、未解決な $M/G/s$ 待ち行列モデルについて、各処理装置の動作時間を考え解析する。その2は、タイムシェアリングシステムの一方式である、多段帰還方式の系内呼数を解析し、その平均特性などを解明する。その3は、多重処理装置による会話形処理モデルを、状態方程式による方法を用いて解析する。

目 次

序 文

第 I 部 2 進乱数の変換と改善

第 1 章 第 I 部の序論	1
1.1 乱数に関する諸研究	1
1.2 本研究第 I 部の目的と概要	3
第 2 章 論理回路による 2 進乱数の変換	6
2.1 物理的 2 進乱数源の例	6
2.2 出現確率の変換	9
2.2.1 論理関数と出現確率	9
2.2.2 論理回路による出現確率の変換	10
2.3 系列相関の変換	12
2.3.1 系列相関の定義と性質	12
2.3.2 論理回路による系列相関の変換	13
2.3.3 系列相関の変換の例	15
第 3 章 論理回路による出現確率, 系列相関の分布の変換	17
3.1 モデルの説明	17
3.2 出現確率の分布の変換	18
3.3 系列相関の分布の変換	18
第 4 章 2 進乱数の改善	20
4.1 出現確率, 系列相関が確定的な場合	20
4.1.1 一様性の改善	20
4.1.2 一様性改善に適する論理関数	22
4.1.3 独立性の改善	24
4.1.4 改善に要する入力数	25
4.2 乱数源の母集団を考えた場合	26
4.2.1 分布による改善度の検討	26
4.2.2 分布の数値計算	28

第 5 章 ランダム入力による論理関数の同定	32
5. 1 問題の提起と複数組の入力による同定	32
5. 2 1 組の入力による同定	33
第 6 章 第 I 部の結論	35

第 II 部 情報処理システムの待ち合わせ問題

第 7 章 第 II 部の序論	37
7. 1 待ち合わせ問題に関する諸研究	37
7. 2 本研究第 II 部の目的と概要	39
第 8 章 複数処理装置における動作時間と待ち時間の解析	42
8. 1 $M/G/s$ 待ち行列モデル	42
8. 2 処理装置の動作時間	43
8. 2. 1 動作時間の定義	44
8. 2. 2 動作時間の時間的变化	45
8. 3 動作時間の分布	46
8. 3. 1 確率連続性	46
8. 3. 2 分布を支配する方程式	47
8. 3. 3 分布の連続性	48
8. 3. 4 極限分布の存在	49
8. 4 到着時点および任意時点における分布	50
8. 5 定常分布の存在条件	52
8. 6 待ち時間とその分布	54
8. 7 数値解析	55
8. 7. 1 $s = 2$ の場合の方程式	55
8. 7. 2 境界条件	58
8. 7. 3 結 果	61
第 9 章 多段帰還方式の系内呼数の解析	66
9. 1 多段帰還待ち行列モデル	66
9. 2 状態確率とその確率母関数	69
9. 2. 1 量子終了直後の状態の推移確率	69

9.2.2	平衡状態確率の母関数についての関数方程式	71
9.2.3	関数方程式の解について	72
9.3	任意時点における系内呼数の分布	76
9.4	系内呼数のモーメント	78
9.4.1	任意時点における系内呼数のモーメント	78
9.4.2	平均系内呼数	80
9.4.3	系内呼数の標準偏差	81
9.5	平均系内呼数を求める別法	83
9.5.1	待ち行列モデルと条件つき平均待ち時間	83
9.5.2	Littleの関係式とその応用	85
9.6	数値計算例	86
9.6.1	平均系内呼数	87
9.6.2	系内呼数の標準偏差	90
第10章	多重処理装置による会話形処理モデルの解析	91
10.1	会話形処理の待ち行列モデル	91
10.2	状態方程式	93
10.2.1	状態推移	93
10.2.2	状態方程式の導出	95
10.3	平衡条件	96
10.4	状態方程式の解	96
10.4.1	基礎考察	96
10.4.2	解の導出と等価モデル	97
10.5	平均特性	100
10.5.1	系内呼数の平均および分散	100
10.5.2	平均系内時間	101
10.6	数値計算例	102
第11章	第Ⅱ部の結論	106
	謝 辞	108
	参考文献	109

第 I 部

2 進 乱 数 の 変 換 と 改 善

第1章 第I部の序論

1.1 乱数に関する諸研究

電子計算機の高速化、大形化に伴い、多くの繰り返し計算や多くの記憶容量を必要とするシミュレーションおよびモンテカルロ法に基づく計算が理工学分野における解析、社会的経済的な現象の解明のために実行可能となり、実際に多くの例が見られる。電子交換方式やタイムシェアリングシステムなど情報処理システムの設計のためのシミュレーション解析（〔SNK〕、〔Kan〕^{*}）も行なわれている。これらには多数の乱数を使用するのが普通であり、乱数発生的高速化および乱数の質の向上を目指して多くの研究が行なわれている。

電子計算機の出現する前にも、統計における標本のランダム抽出を行なうためなどの目的で、あらかじめ乱数表を作っておき、これを利用することが行なわれてきた。その後、電子計算機の出現と共に、むしろ利用する直前に乱数を発生させる方法が取られるようになった。

乱数(random numbers)には大別して疑似乱数(pseudo random numbers)と物理乱数(physical random numbers)の2種類がある。前者は何らかの算術的手段によりつぎつぎに作り出されるもので、その意味では決定論的方法による数列である。後者は、確率的と見なされている物理的現象を利用して発生された数列である。なお、乱数と言った場合でも単独の数を意味するのではなく、乱数列とまったく同じ意味に用いられることに注意する。

まず疑似乱数に関する研究について概観して見よう。最近の乱数の研究では、疑似乱数の方が物理乱数よりも圧倒的に多くの研究がなされており、概説論文も多い（〔E〕、〔HD1〕、〔Si〕）。有界領域、たとえば(0, 1)に一樣分布する疑似乱数を発生させる方法として4つの代表的な方法が知られている。そこでそれらの方法に関する研究を述べる。その第1は電子計算機の出現間もなくの頃、von Neumannらが原子核崩壊のシミュレーションを行なった時用いた乱数発生方法であり、2乗採中法(middle square method)やこれを多少変形した方法である（〔Vo〕）。2乗採中法は、前の数を2乗して得られる2倍の桁の数の真中の部分を取り出して、つぎの数とする方法である。von Neumannはさらに文献〔Vo〕の中で、一樣でない一般の分布を持つ乱数への変換についても述べている。

その第2は、乗算合同式法(multiplicative congruence method または multiplicative congruential method) または Lehmer法と呼ばれるもので、Lehmer以下多くの研究者達によって、比較的初期の頃とくに盛んに研究された（〔Le〕、〔M〕、〔BB1〕、〔C〕、〔IBM〕、〔Bu1〕、〔Li〕、〔Ba〕、〔St〕、〔J2〕、〔Va〕）。

その後、第3番目の方法として、混合合同式法(mixed congruence method または mixed

congruential method) が提案され、研究された ([R], [Gr1], [Ku], [ADH], [HD2])。乗算合同式法はつぎの数を決定する式が定数係数の線形合同式であるのに対し、混合合同式法ではさらに定数項が加えられ前者より一般化された方法である。さらに第2, 3の方法と異なるが、直前の数と有限回前の数の和のやはり合同式を用いた方法に関する研究もある ([GSK])。しかしあまり結果は良くないので、このような単なる合同和を用いた方法に関する研究は少ない。

第4の方法として、無理数を利用する方法がある。 π (円周率) の値の計算およびその統計的検定を行なった例がある ([SW], [P])。さらに無理数を α とし、 n 番目の乱数として $\{n\alpha\}$ を取る方法があり、これは Weyl によって一様になることが証明されている。ただし $\{ \}$ は整数部分を除く記号である。Weyl 数列とも呼ばれるが、これに関する研究もなされている ([F], [J1])。この方法による乱数は独立性はあまり良くないが、一様性が非常に良好で、通常準乱数 (quasi-random numbers) と呼ばれる。

つぎに物理乱数の例をあげる。放射性同位元素から放射される r 線を用いたもの ([Mik], [HAI])、サイクロトロンを用いたもの ([SK1])、熱放電管を用いたもの ([KMM], [UHS]) などがある。これらの物理乱数については、統計的な検定を行なうとともに、それぞれに応じた乱数の改善を行なっている。

線形順序回路 (linear sequential circuits) の出力も一種の2進の疑似乱数と言えるが、これに関する研究、とくにその出力の周期に関する研究も多い ([E1], [Fr], [Z], [Gi2], [T])。さらに一般化された非線形順序回路についても、最大周期を持つ条件が明らかにされている ([KT])。このような順序論理回路の出力を低域濾波器に通して、疑似的な白い雑音 (white noise) を得ることができる ([Gils], [AFR])。

一様乱数の統計的検定に関しては、上述の諸研究においてもそれぞれ実際に適用されているが、統計的検定そのものについての研究もある ([LW], [BB2], [Bu2], [HAI])。検定とも関連するのであるが、乱数列の性質をフーリエ解析によって表示したり ([J2], [CM])、系列相関や自己相関関数により表示する ([Go], [Gr2], [J1], [MM], [EG]) 試みもなされている。

一様乱数の改善については、Horton らが2進数の場合 ([H])、一般の場合 ([HS]) にどちらも、合同式の和によって改善できることを示した。さらに Walsh も同じ方向に従って compound randomization と名づけて改善の程度を評価した ([W])。以上はいずれも乱数表の乱数の改善に関連して考察したものであるが、電子計算機で発生させる疑似乱数についても、同様の主旨に沿って複数個の疑似乱数列を組み合わせる改善することが提案されている ([MaM], [We])。また多数の周期的疑似乱数列を論理関数の入力として使い、改善する問題も扱われている ([EG])。

以上は主として一様分布する乱数に関する研究であった。一様乱数から、他の分布をなす乱数に変換する方法については、von Neumann ([Vo]) が一般論を述べているが、特殊な分布として正規分布の場合 ([Mu1], [Bu1], [Kr]) および指数分布の場合 ([Ma1], [Ma2]) などが検討されている。また閾素子によって分布を変換する問題 ([Gi1], [Sh]), モジュラー回路による変換の問題 ([Ka1], [Ka2]) も検討されている。また一様乱数を用いてマルコフ連鎖をなす乱数列を発生させることもできる ([SK2])。

応用面を考えた研究は以上のように行なわれてきた。これらとは異なり、むしろ数学基礎論に近い形で、乱数列を定義しようとする試みもある。Minsky は Turing 機械によりほとんど予測できない数列のあることを示し ([Mi]), Kolmogorov は数列を発生させるプログラムの長さでランダムな度を測ろうと試みた ([K1])。このKolmogorov の仕事に沿った研究が幾つかなされている ([So1], [So2], [ML], [Ch], [K2])。

1.2 本研究第I部の目的と概要

乱数に関する研究、あるいは乱数に関連する研究は、前節で述べた諸研究だけでも多岐にわたっており、その外にも乱数の応用面まで含めると非常に多くなる。ただし乱数に関する研究は全般的に見て、疑似乱数に対する研究が圧倒的に多い。疑似乱数の決定論的性質のために予め統計的検定を行なうなど、前もって十分にその性質を調べておくことができるので乱数の改善を問題とするよりも、発生方法を直接吟味する方法が主流のようである。

本研究では物理乱数を取り上げ、とくにその改善について論ずる。物理乱数に関しては、その発生方法と同時に、個々の発生方法に応じて改善法が考案されている。出現確率については、乱数表の乱数の改善について得られた方法がそのまま流用できる程度で、物理乱数の改善に関する一般論は無い。とくに、乱数列の独立性についてあまり検討されていないようである。そこで、物理乱数の改善方法を、とくにその確率的特性として重要と思われる

(a) 出現確率

(b) 系列としての独立性（逆に相関性と言ってもよい）

を取り上げ検討することを考えた。物理乱数の場合には、源となる確率的な物理現象と、それを数に変換する機構とに完全に依存する系列が得られるため、良質の乱数を初めから得ることは期待できないので、乱数の改善について検討しておくことは有意義である。

本文でも例をあげるが、比較的簡単な物理的乱数源もあるので、このような乱数源を多数用いて改善を図ることができないだろうかと考えたのが、問題として取り上げた発端である。そのとき、組合せ論理回路を用いて改善できれば

- (i) 乱数の発生速度は、変らずにすむ。
- (ii) 計算機に組み込む場合にも、他の回路との結合も容易である。

などの利点がある。

とくに、本研究で2進乱数を取り上げた理由は、

(i) 現在計算機内の論理回路でも、2値論理を用いており、必要に応じた桁数の2進数を用意すれば十分である。

(ii) 最も簡単な場合で、乱数の改善を行なう本質的な問題点を解決するのに容易で、典型的な例となり得ると考えられる。

からである。物理乱数の利点は、

(i) 比較的高速である。たとえば、計算機用の論理回路と同程度で、発生可能であるとすれば、ソフト的に発生する疑似乱数と比較したとき、その発生ステップにより異なるが十数倍の速度となる。

(ii) 異なる乱数源同士は、たがいに独立と考えられる。

(iii) 完全な周期性はまず無いと考えられる。

などである。一方、不利な点は、再現性のないことである。したがって、あまり再現性を必要としない分野で利用されることが望まれる。強いて再現性を必要とする場合には、使用した乱数列を記録して、再現することである。

本論文第1部の第2章以下の構成はつぎの通りである。

第2章では、物理的2進乱数源の一例をあげるとともに、組合せ論理回路の入力に独立な定常2進乱数源を接続した場合に、出現確率および系列相関が、出力側にどのように変換されて出て来るか調べる。

第3章では、さらに各乱数源の出現確率、系列相関がある分布をしているモデル、すなわち乱数源の母集団を考えるモデルを提案し、出現確率、系列相関の分布が、組合せ論理回路により、どのように変換されるか定式化する。

第4章では、前の2章の結果を利用して、2進乱数の改善の問題を扱う。出現確率の一様性、系列としての独立性を、mod 2の和およびその否定を用いて改善できることを示し、その条件等を明らかにする。また、乱数源の母集団を考えたモデルにより、乱数の改善度を表わし、入力に用いる乱数源の数を決定する尺度を与える。

第5章では、第2章の出現確率の変換の応用として、ランダム入力により論理関数を同定できることを示す。

以上第1部は、ほとんど京都大学矢島助教授との共同研究〔YaY1〕,〔YaY2〕,〔YoY1〕～〔YoY5〕

をまとめたもので、その主要な部分は〔Y〇Y6〕として発表される。

第2章 論理回路による2進乱数の変換

本章では、まずエサキダイオード対回路による物理的2進乱数源の例をあげるとともに、組合せ論理回路の入力として多数の定常2進乱数源を接続したとき、得られる出力乱数列の性質を調べる。

これは、以下の章で研究する事項、例えば論理回路を用いて乱数を改善する問題を取り扱うための基礎考察である。乱数列の性質としては、定常性を常に仮定しておき、0, 1の出現確率と系列相関を取り上げる。

2.1 物理的2進乱数源の例

前章で述べたように、これまでに種々の物理的乱数源が考案され、応用されている。図2.1にあげたものも物理的乱数源の一例である（〔YaY1〕）。もとは、高速論理回路として考案され

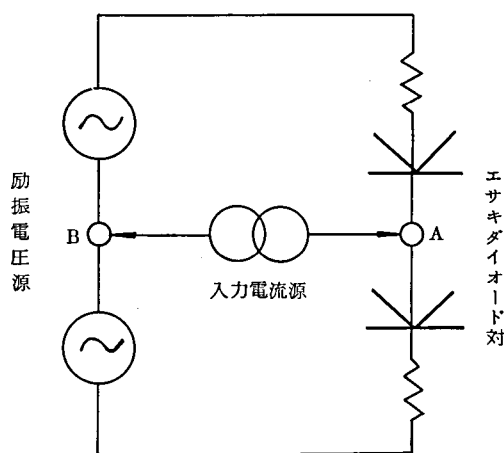
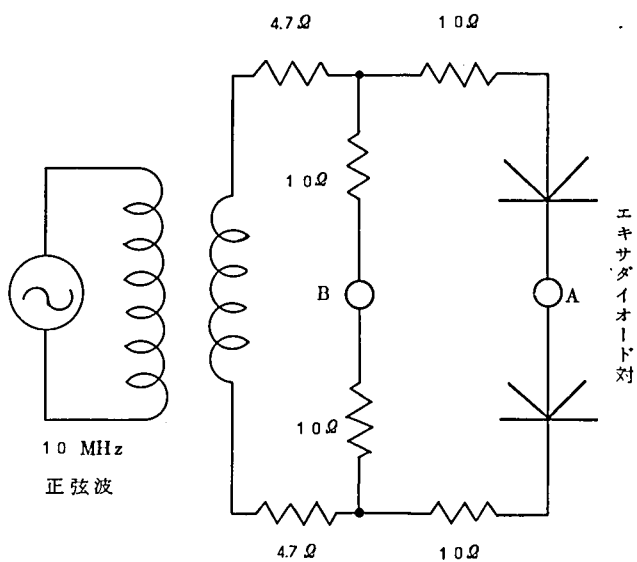
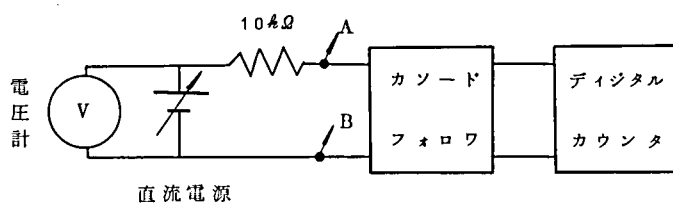


図 2.1 物理的2進乱数源の例

たエサキダイオード対回路である。特性のそろったエサキダイオード対を用いると、周期的な励振電圧に対して、基準点Bに対する中点Aの相対電位として、正または負のパルスが現われる。このパルスの正負は十分大きな絶対値の入力電流のある場合には、その電流の向きにより逆転する。比較的小さな入力電流の場合には、主としてエサキダイオード中の電流雑音により出力パルスは、ランダムに正または負となる。これらを1, 0の数字に対応させると2進乱数列が得られる。



(a) 実験に用いたエキサイダイオード対回路



(b) 測定用回路

図 2.2 実験用回路

図 2.2 の回路を用いて、負パルスの現われる割合を、入力電流に対してプロットしたものが図 2.3 である。用いたエサキダイオードは、ピーク電流が 10 mA 、障壁容量が 6 pF のゲルマニ

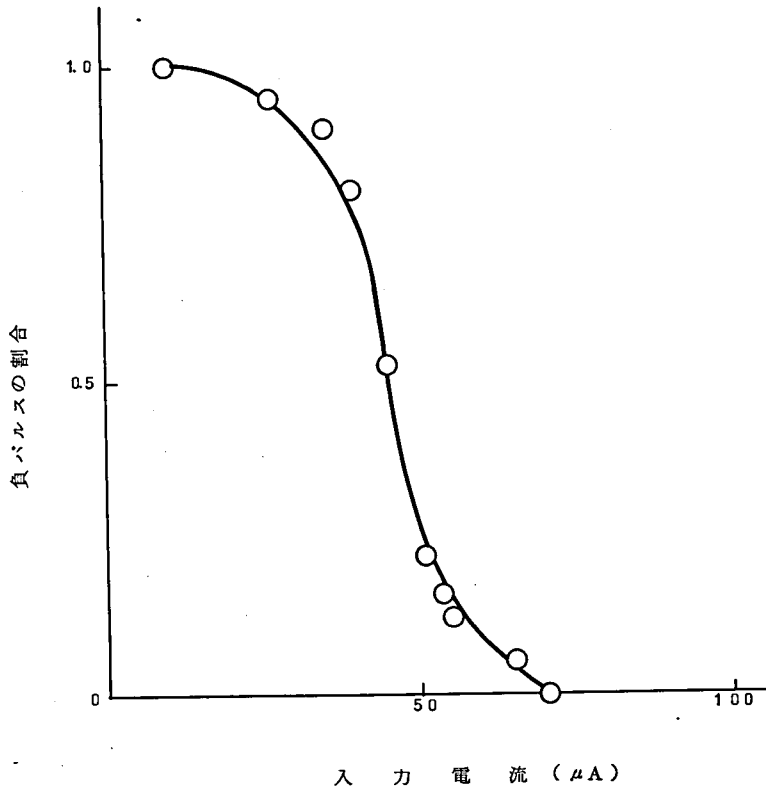


図 2.3 実験結果

ウム・エサキダイオードであり、励振電源は 10 MHz の正弦波を用いた。デジタルカウンタで 0.1 秒間における負パルスを数えた。図中、負パルスの割合が 0.5 になる入力電流が $45\text{ }\mu\text{A}$ であって、 0 でないのはエサキダイオードの特性が完全に等しくないなどの回路の不平衡なためである。

この回路は、入力電流によって、 0 、 1 の割合を変化できる特徴を持つが、この割合を 0.5 の附近に維持することが難しい。

このような比較的簡単な物理的乱数源もあるので、多数個の乱数源を用いて、一つの良質な乱数源を構成することも十分可能である。前にも述べたように物理乱数は再現性の無いという欠点もあるので、十分良質の乱数を得るための改善方法を検討しておくことは有意義である。

2.2 出現確率の変換

2.2.1 論理関数と出現確率

n 変数論理関数は

$$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

の写像と考えられ、その入力変数 x_1, \dots, x_n と出力変数 x_0 ($x_i \in \{0, 1\}$, $i=0, 1, \dots, n$) との関係はブール代数によって表現されるのが普通であるが、算術的四則演算を用いた算術多項式表示によって表現することもできる ([Tak])。2変数以下の代表的な論理関数に対する算術多項式表示を表 2.1 に示す。ただし、 \neg , \vee , \wedge はそれぞれ否定, 論理和, 論理積を表示する記号とする。今後この記号を用いる。

表 2.1 算術多項式表示の例

関 数 名	論 理 関 数	算術多項式表示
定数関数 {	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$
恒等関数	$x_0 = x_1$	$x_0 = x_1$
否定関数	$x_0 = \bar{x}_1$	$x_0 = 1 - x_1$
論理積	$x_0 = x_1 \wedge x_2$	$x_0 = x_1 x_2$
論理和	$x_0 = x_1 \vee x_2$	$x_0 = x_1 + x_2 - x_1 x_2$
mod 2 の和	$x_0 = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$ ($\equiv x_1 \oplus x_2$)	$x_0 = x_1 + x_2 - 2 x_1 x_2$

算術多項式表示は、各入力変数についてたかだか 1 次の多項式の形に必ずでき、表 2.1 の例でもそうになっている。今後、とくに断わらない限り、算術多項式表示はたかだか 1 次の多項式を仮定する。このとき、算術多項式は、展開したとき、項の順序を除いて一意的である。

ところで、入力変数がたがいに独立な確率変数の場合、出力変数も確率変数となる。

$$\text{Prob} \{x_i = 1\} = p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

と定義して、これら p_i を 1 の出現確率、あるいは単に出現確率と呼ぶことにする。 x_i は 0, 1 の 2 値しか取り得ないため

$$p_i = E[x_i] \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

となる。この結果、期待値を取る演算の線形性と、入力変数の独立性を仮定すれば、上述の算術多項式表示の両辺の論理変数 x_i の代りに、その出現確率 p_i を代入する ($i = 0, 1, \dots, n$) だけで、 p_i の関係は多項式表示で完全に表現される。例えば、 $x_0 = \bar{x}_1$, $x_0 = x_1 \wedge x_2$, $x_0 = x_1 \vee x_2$ に対しては、それぞれ、 $p_0 = 1 - p_1$, $p_0 = p_1 p_2$, $p_0 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ となる。mod 2 の和、 $x_0 = x_1 \oplus x_2$ に対しては

$$p_0 = p_1 + p_2 - 2 p_1 p_2 \quad (2.3)$$

となる。

入力、出力変数 x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) を確率変数と見た場合に、入力、出力の出現確率の関係は

$$[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

の写像と考えられ、明らかに、この写像の定義域を $\{0, 1\}^n$ に限れば論理関数となる。また p_i ($i = 0, 1, \dots, n$) の関係を、幾何学的に $(n+1)$ 次元ユークリッド空間における曲面と見ると、この曲面は線織面となる。それは、 p_1, \dots, p_n の各々につきたかだか 1 次の多項式で表わされることから明らかである。

一般に、論理関数を小文字 f により、 $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ と表わしたとき、対応する多項式表示を、大文字 F を用いて $x_0 = F(x_1, \dots, x_n)$ 、したがって $p_0 = F(p_1, \dots, p_n)$ と書くことにする。

2.2.2 論理回路による出現確率の変換

図 2.4 のように、組合せ論理回路の入力として、たがい独立な定常 2 進乱数源 S_i ($i = 1, \dots, n$) を接続した場合の出力系列の性質を調べて見る。組合せ論理回路の性質から、各 S_i が定常的であれば、無論出力系列も定常的となる。さらに前項 2.2.1 の結果を用いれば、論理関数 $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ を実現する論理回路の出力系列の出現確率 p_0 は

$$p_0 = F(p_1, \dots, p_n) \quad (2.4)$$

と表わされる。これが論理回路による出現確率の変換を与える式と考えることができる。ただし、 p_i は乱数源 S_i の 1 の出現確率であり、 F は算術多項式^式表示である。

論理関数を、関数の否定、変数の否定、変数の置換の 3 つの変換によって、同値類に分類することがある。これら 3 つの変換に対して、出現確率がどのように変わるか述べる。変換されるも

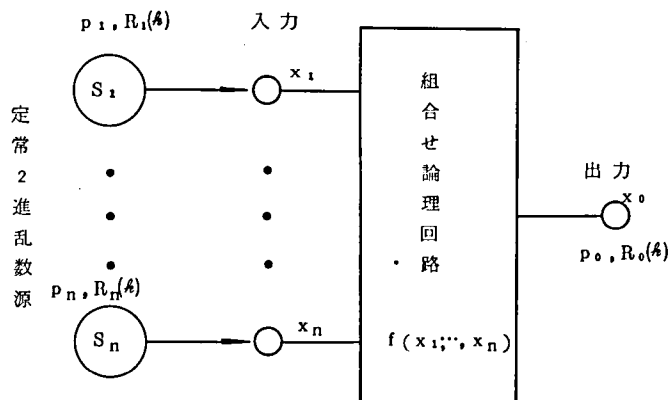


図 2.4 組合せ論理回路による 2 進乱数の変換

との論理関数による，入，出力の出現確率の関係を (2.4) 式とし，変換後の論理関数による出力系列の出現確率を p_0' と置けば，

(I) 関数の否定に対して

$$p_0' = 1 - F(p_1, \dots, p_n) \quad (2.5)$$

(II) 変数の否定（ここでは， x_1 を \bar{x}_1 にする変換とする）に対して

$$p_0' = F(1 - p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (2.6)$$

と， p_1 の代りに $1 - p_1$ を代入するだけで，他の変数は変わらない。

(III) 変数の置換（ここでは， x_1 と x_2 の置換のみを考える）に対して

$$p_0' = F(p_2, p_1, p_3, \dots, p_n) \quad (2.7)$$

と， p_1, p_2 を置換すればよい。

このようになるので，ある論理関数に対する出現確率の変換，すなわち，算術多項式表示を求めて置けば，その論理関数の変換(I)，(II)，(III)による同族論理関数による出現確率の変換は容易に得られる。したがって，これら3つの変換に関する同値類の代表関数に対して求めておけば，すべての論理関数による出現確率の変換が得られる。

変換(I)の例として，2.2.1であげた mod 2 の和の否定 $x_0 = \overline{x_1 \oplus x_2}$ に対する，出現確率の変換は，(2.3)，(2.5) 式から

$$p_0 = 1 - p_1 - p_2 + 2 p_1 p_2 \quad (2.3)'$$

で与えられる。また、この例は $x_0 = \bar{x}_1 \oplus x_2$ と変数の否定とも考えられるが、やはり (2.3)' 式が得られる。

2.3 系列相関の変換

2.3.1 系列相関の定義と性質

前節では、2進乱数の確率的性質として；出現確率を取り上げ、組合せ論理回路により入力から出力へどのように変換されるか研究した。ここでは、2進乱数を時系列として眺め、その時間的相関を調べる。そのために、系列相関が組合せ論理回路によりどのように変換されるか考える。その前に、系列相関を定義し、その性質を述べる。

確率変数 $y(j)$ ($j = \dots, -1, 0, 1, \dots$) を要素とする無限時系列 $\{\dots, y(j), \dots, y(j+k), \dots\}$ の系列相関 (serial correlation) は、 $y(j)$ と $y(j+k)$ の相関係数に相当する量として定義され、とくに定常時系列に対しては時間差を表わす整数 k のみの関数 $R(k)$ となり、次式で表わされる ($[Co]$)。

$$R(k) = \frac{E[y(j)y(j+k)] - E[y(j)]^2}{E[y(j)^2] - E[y(j)]^2} \quad (2.8)$$

明らかに

$$|R(k)| \leq 1 \quad \text{とくに} \quad R(0) = 1 \quad (2.9)$$

である。

上記の時系列が、さらに 0, 1 の 2 値しか取らない場合には、1 の出現確率を p として

$$R(k) = \frac{E[y(j)y(j+k)] - p^2}{p(1-p)} \quad (2.10)$$

となる。したがって、上式を 2 進系列の系列相関の定義式と考えてよい。

さらに、 $p \neq 0, 1$ である限り、“ $R(k)=0$ ”と“ $y(j)$ と $y(j+k)$ が独立である”とは同値である。この性質があるので、2 進乱数の場合にはとくに、乱数の独立性を表わす尺度として適していると言えよう。

2.3.2 論理回路による系列相関の変換

出現確率の場合と同様に、図 2.4 の出力系列の系列相関を定式化する。2.2.2 で与えた仮定は、そのまま成立するとし、さらに各乱数源 S_i の系列相関を $R_i(k)$ ($i=1, \dots, n$)、出力乱数列の系列相関を $R_0(k)$ と書き表わすことにする。

出力における系列相関は、算術多項式表示 $x_0 = F(x_1, \dots, x_n)$ と定義式 (2.10) を用いると、

$$R_0(k) = \frac{E[F(x_1(j), \dots, x_n(j)) F(x_1(j+k), \dots, x_n(j+k))] - p_0^2}{p_0(1-p_0)} \quad (2.11)$$

で与えられる。ただし、 p_0 は (2.4) 式で与えられる値であり、入力変数 x_i は時刻を表わす j 、 $j+k$ を付けて表示した。分子の第 1 項は、期待値を取る演算子 E の線形性、各入力変数の独立性を利用すれば、 $E[x_i(j) x_i(j+k)]$ の形の項が現われるが、各乱数源の系列相関について、

$$R_i(k) = \frac{E[x_i(j) x_i(j+k)] - p_i^2}{p_i(1-p_i)} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.12)$$

したがって

$$E[x_i(j) x_i(j+k)] = p_i(1-p_i) R_i(k) + p_i^2 \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.13)$$

と書ける。その結果、 $R_0(k)$ は p_i 、 $R_i(k)$ ($i=1, \dots, n$) のみに依る関数

$$R_0(k) = R_0(R_1(k), \dots, R_n(k); p_1, \dots, p_n) \quad (2.14)$$

として表わすことができる ([YaY2], [YoY3])。しかも上式の右辺は、各入力の系列相関 $R_1(k), \dots, R_n(k)$ について 1 次の多項式である。

論理関数の 3 種類の変換によって、出力系列の出現確率がどのように変わるか、2.2.2 で述べた。ここでは、同様に出力系列の系列相関がどのように変わるか調べよう。記述を容易にするために、変換前の n 変数論理関数を $x_0 = f(x_1, \dots, x_n)$ 、その算術多項式表示を $x_0 = F(x_1, \dots, x_n)$ 、その出力の出現確率、系列相関をそれぞれ p_0 、 $R_0(k)$ とし (2.14) 式のように書けたとし、変換後の出力変数を x_0' 、出力の出現確率、系列相関をそれぞれ p_0' 、 $R_0'(k)$ と書くことにする。

(I) 関数の否定

$x_0' = 1 - F(x_1, \dots, x_n)$ 、 $p_0' = 1 - p_0$ となるから、これらを (2.10) 式に代入すれば、(2.11)

式と同様の式

$$R_0'(k) = \frac{E\left[\left\{1 - F(x_1(j), \dots, x_n(j))\right\}\left\{1 - F(x_1(j+k), \dots, x_n(j+k))\right\}\right] - (1-p_0)^2}{(1-p_0)p_0}$$

が得られる。上式を整理すると(2.11)式と全く同じ形になり

$$R_0'(k) = R_0(k) \quad (2.15)$$

が成立する。したがって、関数の否定によって、系列相関は変化しないことが結論される。

(ii) 変数の否定 (x_1 を \bar{x}_1 にする変換とする)

図 2.5 のように、まず、1 変数関数 x_1 の否定を考えれば、(2.15)式と、2.2.2 の(i)の結果が

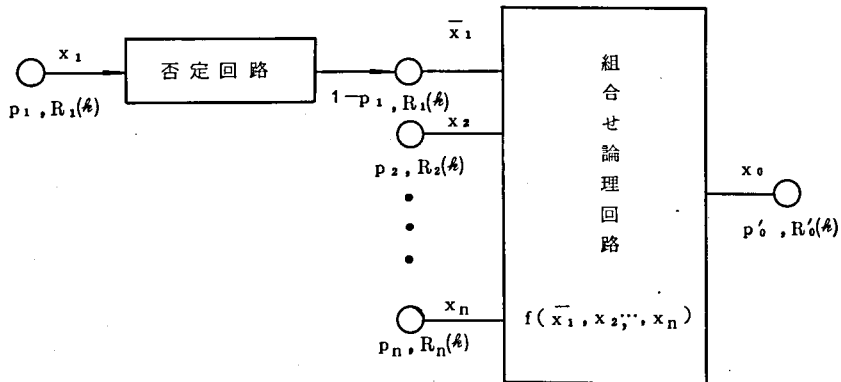


図 2.5 変数の否定による系列相関の変化

ら、出現確率は $1 - p_1$ で、系列相関は不変である。残りの $n-1$ 変数はそのままよいから、

$$R_0'(k) = R_0(R_1(k), \dots, R_n(k); 1-p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (2.16)$$

と、 p_1 の代りに $1-p_1$ を代入するだけでよいことになる。

(iii) 変数の置換 (ここでは、 x_1 と x_2 の置換とする)

明らかに、 p_1 と p_2 、 $R_1(k)$ と $R_2(k)$ を同時に置換すればよい。すなわち、

$$R_0'(k) = R_0(R_2(k), R_1(k), R_3(k), \dots, R_n(k); p_2, p_1, p_3, \dots, p_n) \quad (2.17)$$

以上のようになるので、出現確率の変換の場合と同様に、上記3つの変換に関する同値類の代表関数に対する系列相関を求めておけば、今の場合すべての n 変数論理関数による系列相関の変

換が容易に得られる。

2.3.3 系列相関の変換の例

前項までの結果に基づき 2 変数論理関数の代表として、論理積と mod 2 の和に対して、出力の系列相関を求めてみる。

(i) $x_0 = x_1 \wedge x_2$ のとき

$$R_0(k) = \frac{\{ (1-p_1) R_1(k) + p_1 \} \{ (1-p_2) R_2(k) + p_2 \} - p_1 p_2}{1 - p_1 p_2} \quad (2.18)$$

(ii) $x_0 = x_1 \oplus x_2$ のとき

$$R_0(k) = \frac{\{ 4p_1(1-p_1) R_1(k) + (1-2p_1)^2 \} \{ 4p_2(1-p_2) R_2(k) + (1-2p_2)^2 \} - (1-2p_1)^2 (1-2p_2)^2}{1 - (1-2p_1)^2 (1-2p_2)^2} \quad (2.19)$$

さらに、一般に n 変数の論理積、mod 2 の和に対しても同様に、

(i) $x_0 = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ のとき

$$R_0(k) = \frac{\prod_{i=1}^n \{ (1-p_i) R_i(k) + p_i \} - \prod_{i=1}^n p_i}{1 - \prod_{i=1}^n p_i} \quad (2.20)$$

(ii) $x_0 = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ のとき

$$R_0(k) = \frac{\prod_{i=1}^n \{ 4p_i(1-p_i) R_i(k) + (1-2p_i)^2 \} - \prod_{i=1}^n (1-2p_i)^2}{1 - \prod_{i=1}^n (1-2p_i)^2} \quad (2.21)$$

となる。

なお、1 変数以下に縮退する論理関数以外の 2 変数関数全体の代表関数 (2.3.2 で述べた 3 つの変換による同値類について) として、初めの 2 つの例 (2.18), (2.19) 式を取ることができるので、これから 2 変数関数による系列相関の変換はすべて計算できる。

論理関数の変換との関係の応用例として、 n 変数の論理和による系列相関を求めてみる。

$$x_1 \vee \dots \vee x_n = \overline{\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n} \quad (2.22)$$

と書けるので、 n 変数の論理和は、 n 変数の論理積と同族の論理関数であり、(2.15) 式、(2.16)

式を(2.20)式に適用すれば

$$R_0(k) = \frac{\prod_{i=1}^n \{ p_i R_i(k) + 1 - p_i \} - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)}{1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)} \quad (2.23)$$

が得られる。

第3章 論理回路による出現確率，系列相関の分布の変換

3.1 モデルの説明

前章では，論理回路による出現確率，系列相関の変換を考察した。その際，出現確率および系列相関は各乱数源に固有の確定した値を持つと仮定した。しかし，現実の物理的乱数源では，種々の物理的制約によって，各乱数源が設定値と異なる確率的性質を持ったり，あるいはそれらの確率的性質が時間的変動を伴ったりする場合がある。しかしながら，非定常な場合に対する解析を行なったり，または思い通りのある確率的性質を満足する出力系列を得るように予め設計することは困難であることが多い。

このとき，図3.1に示すように，定常2進乱数源の母集団から， n 個ずつランダムに乱数源を取り出し， n 入力論理回路の入力にそれぞれ接続して，その出力系列を乱数列として利用するモ

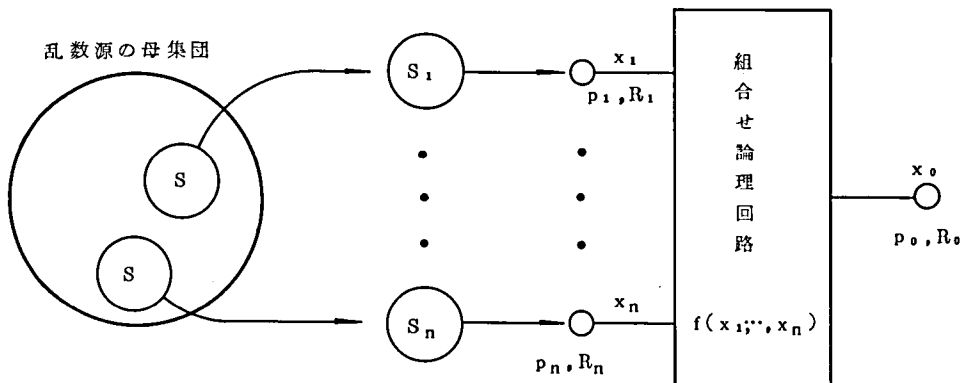


図 3.1 乱数源の母集団を考えたモデル

デルを考える。それぞれが再び定常2進乱数源として構成され，全体として再び定常2進乱数源の母集団が生ずる。この母集団の統計的性質を定式化しようとするのが本章の目的である。さらにこれらの統計的性質を調べて，次章では乱数の改善の問題に適用する。

さらに具体的に，モデルの説明を行なう。各乱数源の定常性，独立性はこれまで通り仮定しておく。多数の乱数源より成る母集団を考え，乱数源の出現確率，系列相関さえも確率変数と考え，先験的なある分布に従うものとする。それらの分布が，組合せ論理回路によってどのように変換されるかを，出力側の分布の形で定式化し，後の乱数の改善に関する議論の助けにする。

前章の結果によれば，論理回路の出力系列における系列相関は，入力系列相関ばかりでなく，

入力の出現確率にも依存する。したがって、入力の出現確率と系列相関の確率的依存性が問題となる。各乱数源間では、発生される乱数列は、これまで通り独立と仮定する。さらに1つの乱数源における出現確率と系列相関も独立であると仮定する。これは、たとえ出現確率が同じ値でも、系列相関の異なる時系列もあり得るので、一応これらは独立と考えてもよいと思われることと、解析の容易さのためである。

3.2 出現確率の分布の変換

論理回路の入力に接続する各乱数源 S_i の出現確率 p_i の分布を表わす確率密度関数を $g(p_i)$ ($i=1, \dots, n$) とする。もちろん、 p_i の未定義域でその値は0とする。すなわち、

$$g(p_i) = 0 \quad (p_i < 0 \text{ および } p_i > 1)。$$

$$\text{しかも } \int_{-\infty}^{\infty} g(p_i) dp_i = 1$$

である。同様に、出力の出現確率 p_0 の分布を表わす確率密度関数を $g_0(p_0)$ と書けば、前節で述べた仮定により

$$g_0(p_0) = \frac{d}{dp_0} \int_{D_p} \prod_{i=1}^n g(p_i) dp_1 \cdots dp_n \quad (3.1)$$

となる。ただし、前章の結果により、多項式表示を用いて積分領域は

$$D_p : p_0 = F(p_1, \dots, p_n), \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.2)$$

である。(3.1)式が論理回路による出現確率の分布の変換を表わす式である。

3.3 系列相関の分布の変換

論理回路の入力に接続する各乱数源 S_i の系列相関 R_i^* の分布を表わす確率密度関数を $h(R_i)$ ($i=1, \dots, n$) とする。やはり R_i の未定義域ではその値を0とする。すなわち

$$h(R_i) = 0 \quad (|R_i| > 1)$$

* 系列相関は、考える時間間隔 k を付記しなければならないのであるが、すべて同じ形式になるので、今後はすべての k に対する系列相関を代表させた意味で、単に R_i と書く。

しかも
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(R_i) dR_i = 1$$

である。出力の系列相関 R_0 の分布を表わす確率密度関数を $h_0(R_0)$ と書けば、前節で述べた仮定により、とくに出現確率と系列相関の独立性も用いて

$$h_0(R_0) = \frac{d}{dR_0} \int_{D_R} \prod_{i=1}^n \{ g(p_i) h(R_i) \} d p_1 d R_1 \cdots d p_n d R_n \quad (3.3)$$

となる。ただし、この式中の積分領域 D_R は前章の (2.17) 式により

$$\begin{aligned} D_R : R_0 &= R_0(R_1, \dots, R_n; p_1, \dots, p_n), \\ |R_i| &\leq 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.4)$$

で与えられる。用いる論理回路により、関数 $R_0(R_1, \dots, R_n; p_1, \dots, p_n)$ は異なる。

第4章 2進乱数の改善

前章までの結果および方法を利用して、組合せ論理回路の入力に多数の乱数源を接続することによる、2進乱数の改善について検討する。初めに、第2章の結果に基づいて、出現確率および系列相関が各乱数源ごとに確定している場合について検討する。つぎに、第3章の結果に基づき、乱数源の母集団を考えた場合について検討する。

4.1 出現確率、系列相関が確定的な場合

2進乱数の改善について、ここでは一様で、独立な乱数列を得ることを目標とする。すなわち、出現確率が $\frac{1}{2}$ （一様性）で、時系列~~とも~~^{中々要素が}互いに独立（独立性）な乱数列である。

4.1.1 一様性の改善

確率 $\frac{1}{2}$ からのずれを問題にするために、出現確率 p_i ($i=0, 1, \dots, n$) の代りに、ずれを表わす

$$q_i = 2p_i - 1 \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

という変数を、今後用いる。 $|q_i| \leq 1$ の範囲の値を取り、 $q_i=0$ と $p_i=\frac{1}{2}$ とは同値である。

一様性の改善に適した組合せ論理回路とは、すべての $(q_1, \dots, q_n) \in [-1, 1]^n$ に対して

$$|q_0| \leq \min_{1 \leq i \leq n} |q_i| \quad (4.2)$$

となる回路であると定義する。すなわち、入力に接続したどの乱数源の一様性よりも、つねに出力乱数列の一様性が良いことを、乱数の一様性改善の条件としたことになる。

このとき、Hortonの結果([H])または(2.3), (2.3)'式に(4.1)式を代入して見ると、2変数のmod 2の和 $x_0 = x_1 \oplus x_2$ とその否定に対し、それぞれ

$$q_0 = -q_1 q_2 \quad (4.3)$$

$$q_0 = q_1 q_2 \quad (4.3)'$$

となる。さらに n 変数のmod 2の和 $x_0 = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ とその否定に対しても同様にして

$$q_0 = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n q_i \quad (4.4)$$

$$q_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^n q_i \quad (4.4)'$$

となり、条件(4.2)式をいずれも満足することは明らかである。したがって、mod 2 の和とその否定関数が一様性の改善に適した論理関数である。

ここでは逆に、これら2つの関数以外に、上述の定義の意味で一様性改善に適する論理関数は無いことを証明する。

すべての n 変数論理関数の中から、一様性改善に適するものを選び出すと、上記の2つの関数のみが選ばれることを示す。まず、用いるすべての乱数源の出現確率が $\frac{1}{2}$ のとき、出力のそれも $\frac{1}{2}$ でなければならない。ゆえに、これを満たす論理関数は主加法標準形で書いたとき、 2^{n-1} の項から成る。さらに、 n 入力のうち、たとえば i 番目の入力の乱数源の出現確率が $\frac{1}{2}$ のときにも、出力のそれは $\frac{1}{2}$ でなければならない。一般に n 変数論理関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_i \wedge f_i) \vee (\bar{x}_i \wedge f_i^1) \quad (4.5)$$

と展開した形から、算術多項式表示は

$$F(p_1, \dots, p_n) = p_i F_i + (1 - p_i) F_i^1 \quad (4.6)$$

となる。ただし、 f_i, f_i^1 は x_i 以外の $(n-1)$ 変数の関数であり、対応する算術多項式表示が F_i, F_i^1 である。よって、 $p_i = \frac{1}{2}$ のときつねに $F(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2}$ 、すなわち恒等的に

$$F_i + F_i^1 = 1 \quad (4.7)$$

が成立しなければならず

$$f_i^1 = \bar{f}_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.8)$$

が成立しなければならない。この条件を満足するのは、 $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ とその否定のみであることが証明される。これは、4.1.2で証明する。

以上の結果をまとめると、mod 2 の和を用いて2進乱数の一様性改善を行なえることはHortonの示した通りであるが、この関数とその否定以外に2進乱数の出現確率の一様性改善に適する論理関数は無いことが結論される。

前章で示したように、系列相関についても関数の否定により不変であるので、今後はmod 2 の和のみを取り上げて検討する。

つぎに、mod 2 の和を用いるとき、入力数 n を増すとほとんどの場合、出力の出現確率が

$p_0 \rightarrow \frac{1}{2}$ となることを示す。厳密にはつぎのように述べることができる。

mod 2 の和を用いたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_0 = 0 \quad (4.9)$$

が成立する必要十分条件は

- (i) $q_j = 0$ となる j が存在するか,
- (ii) $K_q(n)$ を $|q_i| \leq Q < 1$ を満足する i の個数 ($i=1, \dots, n$) として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_q(n) = \infty \quad (4.10)$$

となる定数 Q が存在することである。

証明は, (4.4) 式から明らかであるから省略する。

4.1.2 一様性改善に適する論理関数

前項で証明し残した, (4.8) を満たす論理関数が mod 2 とその否定のみであることを証明する。

(4.5), (4.8) 式より

$$f = (x_i \wedge f_i) \vee (\bar{x}_i \wedge \bar{f}_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.11)$$

を満たす論理関数 f が, これら 2 関数のみであることを証明する。

まず, (4.11) 式から $i=1$ の場合として

$$f = (x_1 \wedge f_1) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{f}_1) \quad (4.12)$$

が成立する。 f_1 は, 変数 x_2 について

$$f_1 = (x_2 \wedge f^{(2)}) \vee (\bar{x}_2 \wedge f^{(2)'}) \quad (4.13)$$

と展開でき, これから f_1 の否定を考えると

$$\bar{f}_1 = (\bar{x}_2 \wedge \overline{f^{(2)}}) \vee (x_2 \wedge \overline{f^{(2)'}}) \quad (4.14)$$

となる。ただし, $f^{(2)}$, $f^{(2)'}$ は, x_1 , x_2 以外の変数のみの関数である。(4.13), (4.14) 式を (4.12) 式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
f &= (x_1 \wedge x_2 \wedge f^{(2)}) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge f^{(2)'}) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \overline{f^{(2)}}) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{f^{(2)'}}) \\
&= [x_2 \wedge \{ (x_1 \wedge f^{(2)}) \vee (\bar{x}_1 \wedge \overline{f^{(2)}}) \}] \vee [\bar{x}_2 \wedge \{ (x_1 \wedge f^{(2)'}) \vee (\bar{x}_1 \wedge \overline{f^{(2)'}}) \}] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

が得られる。一方、(4.11)式の $i=2$ に対する式から

$$f = (x_2 \wedge f_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{f}_2) \quad (4.16)$$

が成立する。ところで、一般に論理関数 φ, ϕ について、上と同様の記法 φ_i, φ_i' を用いると

$$\varphi = \phi$$

と

$$\varphi_i = \phi_i, \quad \varphi_i' = \phi_i' \quad (4.17)$$

とは同値である。したがって、(4.15), (4.16) 式から

$$\begin{aligned}
(x_1 \wedge f^{(2)}) \vee (\bar{x}_1 \wedge \overline{f^{(2)}}) &= \overline{(x_1 \wedge f^{(2)'}) \vee (\bar{x}_1 \wedge \overline{f^{(2)'}})} \\
&= (\bar{x}_1 \wedge f^{(2)'}) \vee (x_1 \wedge \overline{f^{(2)'}})
\end{aligned}$$

したがって、再び(4.17)を用いて

$$f^{(2)'} = \overline{f^{(2)}} \quad (4.18)$$

が得られる。これを(4.15)式に代入すれば

$$f = \{ \overline{x_1 \oplus x_2} \wedge f^{(2)} \} \vee \{ (x_1 \oplus x_2) \wedge \overline{f^{(2)}} \} \quad (4.19)$$

が得られる。

さらに x_3 について(4.19)式を展開し、(4.11)式の $i=3$ の場合を用いれば同様にして

$$f = \{ (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \wedge f^{(3)} \} \vee \{ (\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}) \wedge \overline{f^{(3)}} \}$$

が得られる。ただし、 $f^{(3)}$ は x_1, x_2, x_3 以外の変数の関数である。

同様の過程を繰り返すと、

$$f = \{ (x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-1}) \wedge f^{(n-1)} \} \vee \{ (\overline{x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-1}}) \wedge \overline{f^{(n-1)}} \} \quad (4.20)$$

が得られる。 $f^{(n-1)}$ は変数 x_n のみの関数である。真の n 変数関数となるためには

$$f^{(n-1)} = x_n \quad \text{または} \quad \bar{x}_n$$

となり、これらを(4.20)式に代入して得られる関数 f は、mod 2の和とその否定となる。

これで所期の命題が証明された。

4.1.3 独立性の改善

出現確率の一様性を改善するのに、mod 2の和が適していることが、4.1.1で明らかとなった。ここでは、mod 2の和を用いたとき、出力の系列相関がどうなるか調べる。

まず、(2.21)式に、(4.1)式を代入すると

$$R_0 = \frac{\prod_{i=1}^n \{ (1 - q_i^2) R_i + q_i^2 \} - \prod_{i=1}^n q_i^2}{1 - \prod_{i=1}^n q_i^2} \quad (4.21)$$

が得られる。とくに

$$q_1 = \dots = q_n = 0$$

のときには

$$R_0 = \prod_{i=1}^n R_i \quad (4.22)$$

となり、出現確率の場合の(4.4)式と同様の式が得られる。

入力数 n を増して行ったら、ほとんどの場合に出力の出現確率が $\frac{1}{2}$ に近づくことを、4.1.1で示した。ところが(4.22)式を見ると、それと共に系列相関も0に近づくことが期待できる。厳密には、つぎの命題が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_0 = 0 \quad (4.23)$$

の成立する十分条件は

- (i) $q_j = 0$ となる j が存在するか、
- (ii) $K_q(n)$ を $|q_i| \leq Q < 1$ を満たす i の個数($i=1, \dots, n$)として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_q(n) = \infty \quad (4.24)$$

となる定数 Q が存在する。

さらに,

$$(iii) \quad (1 - q_j^2) R_j + q_j^2 = 0 \quad (4.25)$$

となる j が存在するか,

(iv) $K_R(n)$ を $|R_i| \leq R < 1$ を満足する i の個数 ($i=1, \dots, n$) として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_R(n) = \infty \quad (4.26)$$

が成立することである。

上の十分条件を簡単に証明する。(i)または(ii)の条件は, 4.1.1 で述べた

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_0 = 0 \quad (4.27)$$

の条件である。出力の出現確率を表わす (4.4) 式を用いて, (4.21) 式を書き直すと,

$$(1 - q_0^2) R_0 + q_0^2 = \prod_{i=1}^n \{ (1 - q_i^2) R_i + q_i^2 \} \quad (4.28)$$

が得られる。(iii)または(iv)の条件が成立すれば, (4.28)式の右辺は 0 に収束し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1 - q_0^2) R_0 + q_0^2 \} = 0$$

となる。(4.27)式が成立するので, (4.23)式が証明される。

系列相関が 0 ということと, その 2 進乱数列が独立であることは同値である (参照 2.3.1)。

したがって, 入力数を増すにつれて, ほとんどの場合に出現確率が一樣になるとともに, 独立系列に近づいて行くことがここで証明されたわけである。

4.1.4 改善に要する入力数

4.1.1 および 4.1.3 において, 非常に緩やかな条件のもとで, 入力乱数源の個数を増すことにより, 漸近的に改善を図ることができることを示した。本節の最後に当って, それでは乱数改善のために, 一体何個の乱数源を用意すれば良いか考えてみる。

つぎのような評価をすれば, 大體の見当をつけることができる。

q, R をある定数として

$$|q_0| \leq q < 1, \quad |R_0| \leq R < 1 \quad (4.29)$$

がともに成立するための, 入力数 n を求めてみる。

$$\sup_i |q_i| = Q < 1, \quad \sup_i |(1-q_i^2) R_i + q_i^2| = R' < 1 \quad (4.30)$$

と仮定できるとすれば、(4.4) 式から

$$|q_0| \leq Q^n \quad (4.31)$$

(4.28) 式から

$$(1-q_0^2) R_0 + q_0^2 \leq R'^n \quad (4.32)$$

が成立すれば十分である。(4.29), (4.31) 式から

$$q \leq Q^n \quad (4.33)$$

(4.29), (4.32) 式から

$$R \leq \frac{R'^n - q_0^2}{1 - q_0^2} \leq \frac{R'^n}{1 - q^2} \quad (4.34)$$

となるので、

$$n \geq \max \left\{ \frac{\log q}{\log Q}, \frac{\log R(1-q^2)}{\log R'} \right\} \quad (4.35)$$

を満たすようにすれば十分である。

ただし、上式のように n を定めると、言わば最悪設計の立場を取ることにになり、余りにも安全側に設計することになる。そこで、次節では、第 3 章で述べた乱数源の母集団を考えた、実用的な方法を与える。

4.2 乱数源の母集団を考えた場合

独立な定常 2 進乱数源を、mod 2 の和の回路の入力に接続し、出力から改善された乱数列を得ようとするとき、分布の形で、その改善度を検討し、入力乱数源の個数を定める評価尺度または設計基準を、これらより求める。そのとき、第 3 章で導入した乱数源の母集団を考える方法を利用する。

4.2.1 分布による改善度の検討

母集団中の乱数源の出現確率 p_i 、系列相関 R_i の分布を表わす確率密度関数 $g(p_i)$ 、 $h(R_i)$

としては、予めその関数形を知ることができるならば、その形を用いた方がよい。ここでは、計算の容易さと、比較的安全側に設計することを考えて、よく仮定されるように、 $g(p_i)$ 、 $h(R_i)$ ともに一様分布を仮定する。すなわち、 p_i の代りに (4.1) 式で導入した q_i を用いて、 q_i の確率密度関数 $g(q_i)$ として

$$g(q_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |q_i| \leq 1 \\ 0 & |q_i| > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

また R_i の確率密度関数も

$$h(R_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |R_i| \leq 1 \\ 0 & |R_i| > 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

とする。

このような一様分布の仮定は、実際問題としてかなり質の悪い乱数源を想定していると考えてよい。なぜなら、個々の乱数源としてもできるだけ出現確率が $\frac{1}{2}$ に近く、独立性も高いものを選ぶのが普通であって、 q_i 、 R_i の分布はともに、0 の附近にもっと集中した形になると考えられる。

p_i の代りに q_i を用い、したがって積分領域も (4.4) 式を用いて書き直せば、(3.1) 式と全く同様の形式で、出力の出現確率に対応する分布 $g_0(q_0)$ は

$$g_0(q_0) = \frac{d}{dq_0} \int_{D_q'} \prod_{i=1}^n g(q_i) dq_1 \cdots dq_n \quad (4.38)$$

$$\text{ただし, } D_q' : q_0 = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n q_i, \quad |q_i| \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.39)$$

となる。(4.36) 式を代入して計算すれば

$$g_0(q_0) = \frac{1}{2} \frac{(-\log |q_0|)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (0 < |q_0| \leq 1) \quad (4.40)$$

を得る。

(4.40) 式は、任意の n について、

$$\int_{-1}^{-0} g_0(q_0) dq_0 + \int_{+0}^{+1} g_0(q_0) dq_0 = 1 \quad (4.41)$$

しかも、任意の $n \geq 2$ に対して

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} g_0(q_0) = \infty$$

の成立する関数である。ゆえに、有限の n のとき q_0 の分布は、 $q_0 = 0$ に集中的な確率を持つ形ではない。ところが、(4.40)式からさらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_0(q_0) = 0 \quad (q_0 \neq 0) \quad (4.42)$$

が成立するから、結局

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_0(q_0) = \delta(q_0) \quad (4.43)$$

が得られる。 $\delta(q_0)$ は Dirac のデルタ関数である。

一方、出力の系列相関 R_0 の確率密度関数 $h_0(R_0)$ は、(3.3)式と同じ形式で

$$h_0(R_0) = \frac{d}{dR_0} \int_{D_R^1} \prod_{i=1}^n \{ g(q_i) h(R_i) \} dq_1 dR_1 \cdots dq_n dR_n \quad (4.44)$$

ただし、積分領域は (4.21) 式を用いて

$$D_R^1 : R_0 = \left[\prod_{i=1}^n \{ (1 - q_i^2) R_i + q_i^2 \} - \prod_{i=1}^n q_i^2 \right] / (1 - \prod_{i=1}^n q_i^2) \\ |R_i| \leq 1, \quad |q_i| \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4.45)$$

となる。この式は積分領域が複雑で、出現確率の分布の場合のように、簡単に計算結果を示すことができない。そこで、つぎに、出現確率の分布の数値計算とともに、モンテカルロ法を用いて (4.44) 式を数値計算し、その結果を示す。

4.2.2 分布の数値計算

(4.40), (4.44) 式で表わされる確率密度関数から

$$I_Q = \int_{-Q}^Q g_0(q_0) dq_0 \quad (Q \geq 0) \quad (4.46)$$

$$I_R = \int_{-R}^R h_0(R_0) dR_0 \quad (R \geq 0) \quad (4.47)$$

を計算し、これらの値によって、 q_0 , R_0 の分布を表示する。いま乱数の改善のために $q_0 = R_0 = 0$

を目指しているので、これらの値からのずれが Q , R 以内に入る確率を求め、これらで改善度を示そうという訳である。

(4.46)式は、(4.40)式の結果から

$$I_Q = Q \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-\log Q)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \quad (4.48)$$

となり、その結果を図示したものが、図 4.1 である。 $n=1 \sim 9$ の場合の曲線が描かれている。

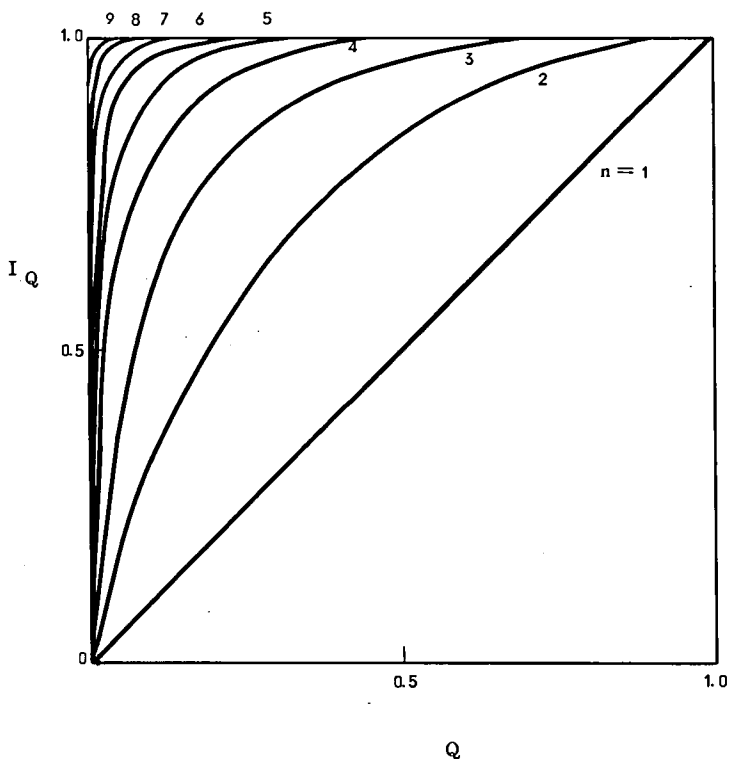


図 4.1 出現確率の分布

一方、(4.47)式は、(4.44), (4.45)式を考慮して書き直すと、

$$I_R = \frac{1}{2^n} \int_{D^{2n}} C(q_1, \dots, q_n; R_1, \dots, R_n) dq_1 dR_1 \dots dq_n dR_n \quad (4.49)$$

ただし

$$C(q_1, \dots, q_n; R_1, \dots, R_n) = \begin{cases} 1 & | \prod_{i=1}^n \{ (1-q_i^2) R_i + q_i^2 \} - \prod_{i=1}^n q_i^2 | / | 1 - \prod_{i=1}^n q_i^2 | \leq R \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であり、積分領域は、 $D^{2n} : |q_i| \leq 1, |R_i| \leq 1 (i=1, \dots, n)$ とする。このような多重積分を計算することは、解析的には勿論、分割数を大きくして行く数値解析でも厄介である。そこで、このような多重積分に有効なモンテカルロ法を用いて数値計算を行なった([FY])。0と1の間の一様乱数を $2n$ 個同時に発生させ、 -1 と 1 の区間に1次変換し、それらを $q_1, \dots, q_n; R_1, \dots, R_n$ の値に対応させ、 $C(q_1, \dots, q_n; R_1, \dots, R_n) = 1$ となる回数を数え、乱数の全発生回数との比で、求める(4.49)式の積分値とした。定積分を計算するのに特別有効と言われる準乱数(quasirandom numbers)によるHaselgroveの方法([Ha]),および普通の疑似乱数による方法の2通りを用いたが、いずれもよく収束し、全回数が2,000~4,000程度で2桁の精度の数値が得られた。その結果を図4.2に示す。やはり $n=1 \sim 9$ の場合が描かれている。

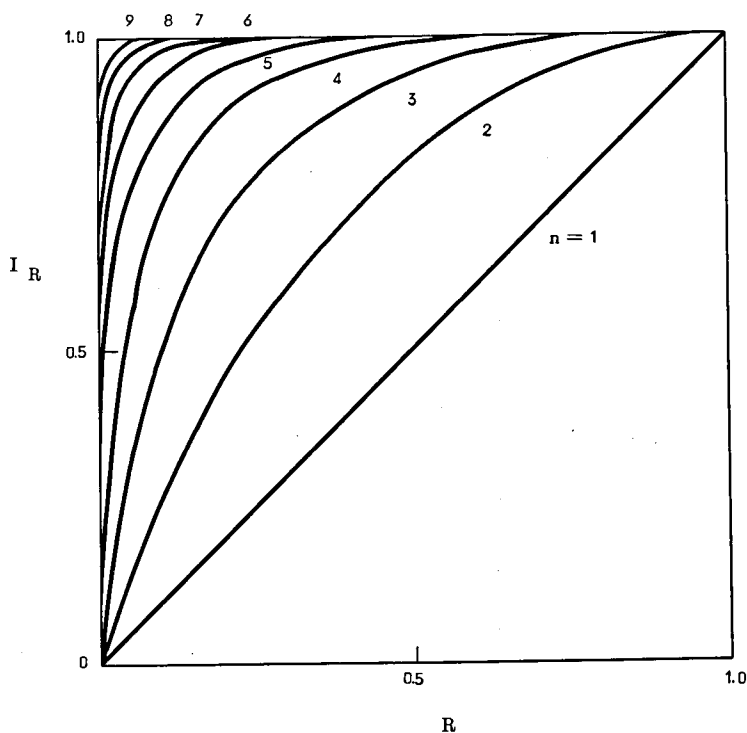


図 4.2 系列相関の分布

なお、 $n=9$ すなわち 18 重積分となる(4.49)式の収束状況を、図4.3に示す。 $R=0.05$ の例である。

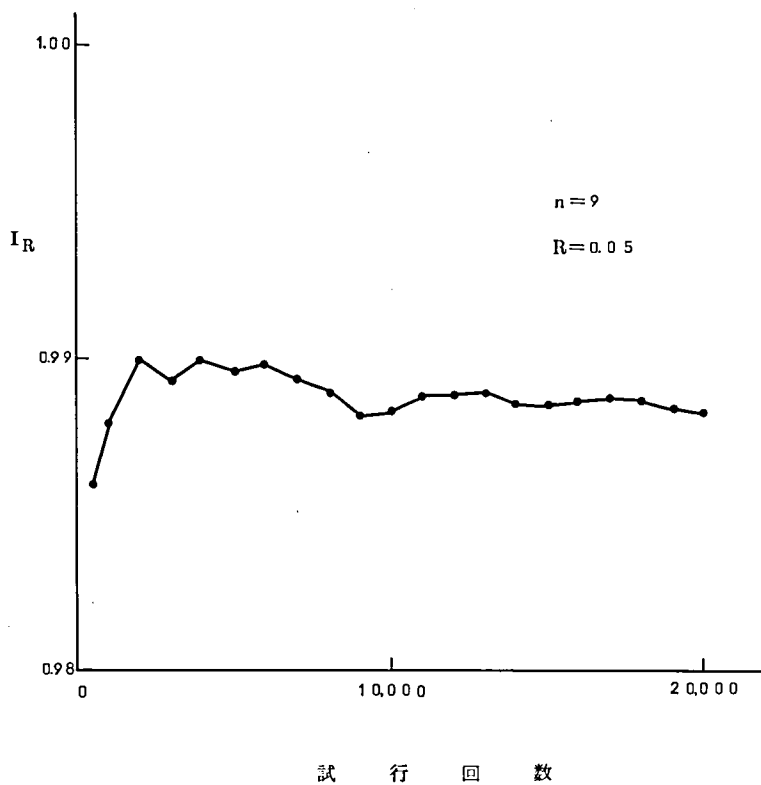


図 4.3 モンテカルロ法による積分の収束例

さて、図 4.1，図 4.2 を用いて、改善に要する入力乱数源の個数を決定する例をあげておこう。たとえば、 $|q_0|, |R_0|$ がともに 0.1 以下である確率を 0.95 以上にするには、図 4.1 から $n \geq 6$ ，図 4.2 から $n \geq 7$ でなければならない。したがって両方を満足する必要最小の乱数源の数は $n=7$ となる。

第5章 ランダム入力による論理関数の同定

5.1 問題の提起と複数組の入力による同定

前章までは、組合せ論理回路の入力として乱数源を接続したとき、論理回路の出力系列がどんな性質を持つか調べ、乱数の改善に適用して来た。本章では、2.2の応用問題として、これまでとは逆に、論理回路の入力として、ランダム入力を加えたとき、出力の出現確率により、その論理関数を定める問題を考えてみよう([YoY5])。

n 入力論理回路、したがって縮退する形も含めて n 変数論理関数を考え、入力、出力の出現確率はこれまで通り $p_1, \dots, p_n, \overset{\text{出力}}{p_0}$ で表わす。幾組かの (p_1, \dots, p_n) に対する p_0 の値から、論理関数を決定できる場合に、その出現確率の組により n 変数論理関数が同定可能であると言うことにする。

まず、 2^n 組のランダム入力によって同定可能なことを示す。

$$p_i = p_{i1} \text{ または } p_{i2}, \quad \text{ただし } p_{i1} \neq p_{i2} \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.1)$$

の 2^n 組のランダム入力をを用いると可能である。

証明の概略を述べる。 n 変数論理関数に対する出力の出現確率は、主加法標準形に対応する算術多項式表示により

$$p_0 = \sum_{j=0}^{N-1} c_j P_j, \quad \text{ただし } N = 2^n \quad (5.2)$$

の形で表わされる。 j を n 桁の2進数で書き表わしたとき $d_1 \dots d_n$ であれば、

$$P_j = \prod_{i=1}^n \{ (1-p_i)^{d_i} p_i^{1-d_i} \} \quad (5.3)$$

であり、 c_j は0または1である。 c_0, \dots, c_{N-1} に0または1を入れる組合せ 2^N 通りを全部考えれば、 n 変数論理関数全部を尽すことになる。逆に、(5.1)式に対する p_0 の値から c_j の値が完全に決定できれば、上記の命題の証明になる。(5.1)式のすべての組み合わせを(5.2)式の右辺に代入し、 $c_j (j=0, \dots, N)$ を未知数とし、それらの係数の作る行列は、Kronecker 積*を用いて

$$\begin{bmatrix} 1 & -p_{11} & p_{11} \\ 1 & -p_{12} & p_{12} \end{bmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{bmatrix} 1 & -p_{n1} & p_{n1} \\ 1 & -p_{n2} & p_{n2} \end{bmatrix}$$

で与えられる。 $p_{i1} \neq p_{i2}$ であれば、この行列の階数は N となり、1 次連立方程式に関する Cramer の定理により、 c_j の値は完全に決定できる。これで、上述の命題が証明された。

決定論的な方法で、論理関数を決定するには、すべての入力の場合、すなわち 2^n 通りの入力に対する出力の値を知る必要がある。上述の 2^n 組のランダム入力を用いる場合は、そのような決定論的方法の拡張になっている。

5.2 1 組の入力による同定

1 組のランダム入力によって、同定可能な例を示す。すなわち、 $a \neq 1$ を正数として

$$p_i = \frac{a^{2^{i-1}}}{a^{2^{i-1}} + 1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.4)$$

とすればよい。このとき、(5.1) 式に代入すれば、

$$p_0 = \frac{a-1}{a^N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_j a^j \quad (5.5)$$

が得られる。ところが $a \neq 1$ であれば、 c_j のすべての組合せに対する p_0 の値は、すべて異なる。したがって、 p_0 の値から逆に c_j の値が完全に決定できることになり、(5.4) 式のランダム入力の組合せで、 n 変数論理関数が同定可能である。

(5.4) 式で、とくに

$$a = 2 \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} \quad (5.6)$$

の場合には、 p_0 の値が 0, 1 の間に等間隔に並ぶ。 $n=2$ で $a=2$ の例を表 5.1 にあげる。また $a=3$ の場合の例も合わせて載せる。

前節とこの節とで、 2^n 組および 1 組のランダム入力により同定可能なことを示した。さらに、

* 行列 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{\ell 1} & \cdots & x_{\ell m} \end{bmatrix}$ と行列 Y の Kronecker 積

$X \otimes Y$ は $\begin{bmatrix} x_{11}Y & \cdots & x_{1m}Y \\ \vdots & & \vdots \\ x_{\ell 1}Y & \cdots & x_{\ell m}Y \end{bmatrix}$ で定義される。Kronecker 積は結合律を満足するので、

2 つ以上の Kronecker 積が自然に定義できる。

表 5.1 1組のランダム入力による同定の例

論理関数	p_0 の 値		論理関数	p_0 の 値	
	$a=2$ のとき	$a=3$ のとき		$a=2$ のとき	$a=3$ のとき
0	0	0	$x_1 \wedge x_2$	8/15	27/40
$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	1/15	1/40	$\overline{x_1 \oplus x_2}$	9/15	28/40
$x_1 \wedge \overline{x_2}$	2/15	3/40	x_1	10/15	30/40
$\overline{x_2}$	3/15	4/40	$x_1 \vee \overline{x_2}$	11/15	31/40
$\overline{x_1} \wedge x_2$	4/15	9/40	x_2	12/15	36/40
$\overline{x_1}$	5/15	10/40	$\overline{x_1} \vee x_2$	13/15	37/40
$x_1 \oplus x_2$	6/15	12/40	$x_1 \vee x_2$	14/15	39/40
$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	7/15	13/40	1	1	1

$0 < m < n$ として、 p_1, \dots, p_m は (5.4) 式に従って定め、残りの p_{m+1}, \dots, p_n は (5.1) 式に従って定めると、 2^{n-m} 通りの組合せのランダム入力となるが、これによっても、 n 変数論理関数が同定可能である。

なお、(5.5) 式で示される p_0 の値は、論理関数を特徴づける量として定義され、とくに多数決関数およびこれを含む関数族を類別したりする上で重要な役割を果たした、拡張された意味の特性ベクトル ($\{YI\}$) に含まれる一つの量である。

実用的な意味で、本章に述べたランダム入力による方法は決して能率の良い方法ではない。たとえば、表 5.1 で例としてあげた、 $a=2$ の場合でも、 $1/15$ の確率の精度で、出現確率を区別しなければならない。そのときランダム入力の安定度が問題となる。むしろ論理関数の一つの特徴づけとして興味を持たれる。

第 6 章 第 I 部の結論

物理的 2 進乱数源を組合せ論理回路の入力に接続した場合に、出力乱数列の確率的性質がどのような特徴を持つか調べ、物理乱数の改善の問題に適用した。乱数列の確率的性質としては、出現確率と系列相関を取り上げ、mod 2 の和およびその否定の 2 つの論理関数によって、出現確率の一様化、および系列相関を減らすことが実現できることを示した。

最後に、応用問題としてランダム入力により論理関数の同定を行なえることを示した。

第 2 章から第 5 章までの間に得られた主要な結果をつぎにあげる。

(i) 本来論理回路として考案された、エサキダイオード対回路が、エサキダイオード内の電流雑音により一つの物理的 2 進乱数源となし得る。

(ii) 同形式組合せ論理回路の入力に、たがいに独立な定常 2 進乱数源を接続したとき、その入力、出力の出現確率、系列相関の関係を論理回路による変換の形で捉えた。出現確率に対しては、算術多項式表示により表現できることは既知であったが、これを基にとくに系列相関の変換を定式化した。

(iii) 出現確率および系列相関の論理回路による変換が、用いる論理関数の 3 種の変換（関数の否定、変数の否定、変数の置換）により、どのように変化するか明らかにした。

(iv) 出現確率、系列相関もある分布に従うような、乱数源の母集団を考えるモデルを提案し、出現確率および系列相関の分布の組合せ論理回路による変換を定式化した。

(v) 上述の(ii)~(iv)に基づいて、多数の物理的乱数源を用い、組合せ論理回路による改善の問題を考えた。まず、出現確率の一様化に mod 2 の和およびその否定が適していることは周知の事実であるが、これら 2 種類の論理回路以外に、出現確率の一様性改善に適するものは無いことを示した。

(vi) しかも、これら 2 つの関数を用いると入力数を増すにつれ、ほとんどの場合に一様化を図ることができる。その条件を明らかにした。

(vii) それと共に、系列相関もほとんどの場合に 0 に近づいて行く。すなわち、独立乱数列に近づく。その十分条件も明らかにした。

(viii) 最悪設計の立場で、出現確率および系列相関をそれぞれある値以下に抑えるための入力乱数源の最少個数を与えた。

(ix) 乱数源の母集団を考えるモデルにより、出現確率の一様確率からのずれおよび系列相関の値が、ある値以下にある確率により、乱数改善度を表わした。

(x) この改善度を用いて、(viii)と同様に入力乱数源の最少個数を求める方法を与えた。

(x) 上記(ii)の，とくに出現確率の論理回路による変換の応用問題として，逆にランダム入力による論理関数の同定について考え，複数组，および1組のランダム入力によって可能なことを示した。

第Ⅱ部

情報処理システムの待ち合わせ問題

第7章 第Ⅱ部の序論

7.1 待ち合わせ問題に関する諸研究

待ち合わせ問題(queueing problems)を取り扱う待ち行列理論(theory of queues)またはさらに広い範囲を含むふくそう理論(congestion theory), トラヒック理論(traffic theory)は, もともと通信呼, とくに電話の呼(calls)の性質を究める理論として始められたものである。Erlangらの研究など初期における研究状況は文献[BHJ]に詳しく載っている。最近ではシステム工学(systems engineerings)またはオペレーションズ・リサーチ(operations research)の一部門として発達してきている。また工学その他の応用面に密着した特殊な確率過程として, 確率論あるいは統計学の研究者によって解析された例もあり, 種々の手法が与えられている。

以下では, 比較的最近の研究成果のうち, 情報処理システムの待ち合わせ問題に関係のある諸研究および以下の章で扱う事項に関連する諸研究について概観する。

まず処理装置(待ち行列理論では普通, 扱者(servers)と呼ぶ)が複数台置かれる場合で, 実用上重要視されているポアソン分布で呼が到着する完全な待時式の待ち行列モデルの解析について説明する。モデルはKendallの記号^{*}([Hom])を用いて表示する。処理装置数が無限大の場合には $M/G/\infty$ まで解析されている([Ta1])。処理装置が有限複数 s 台の場合も, 基本的な待ち行列のうち $M/M/s$, $M/D/s$ ([Cr1], [Cr2])がよく解析されており, $M/E_k/s$ も一応解析されている([MMc], [He])。 $M/M/s$ はErlangによって初めて研究されたが, その後も, 処理時間分布が処理装置により異なる場合([G], [Mak])や過渡解([S1])も求められている。 $M/G/s$ モデルについても, Cox([Cox]), Descamps ([D])の研究([S2]に紹介されている)もあり周期処理の $M/G/2$ に対する研究([Mu])もあるが未解決な基本的モデルの一つである。さらに一般的なモデルの $GI/G/s$ に関してはKieferら([KW1], [KW2]), Finch ([Fi])のそれぞれ待ち時間, 系内呼数の分布に関する研究がある。また Pollaczek ([Po1], [Po2])の複素積分表示を用いた結果もある。しかし, 各種の評価測度を計算できる方法はまだ無い。Kingmanの近似的な方法([Ki1], [Ki2])も興味ある方法である。平均系内呼数と平均系内時間の関係はかなり一般的な待ち行列モデルに対して得られており([L], [Mo]), $M/G/s$ モデルでは系内呼数と系内時間の分散の関係も得られている([Mo])。

情報処理システムを中央処理装置, 主記憶装置を含む中央処理系, その他の端末装置, 入出力装置, 2次記憶装置およびこれらと中央処理系との間を結ぶデータチャンネルやチャンネル制御装置等を含む周辺系とに分けて考えることができる。情報処理システムにおいて生ずる待ち合わせ

* $A/B/c$ でモデルを表示する。Aは到着間隔分布, Bは処理時間分布, cは処理装置数を表わす。慣用的に, 指数分布はM, 一定分布はD, 一般分布はG, とくに互いに独立な一般分布はGIを用いて表わす。

問題はこれらの各部分においても提起される。そのうち中央処理系においては、とくにタスク、ジョブのスケジューリング(scheduling)が問題となる。共同利用形式の情報処理システムで、いわゆるオンライン、リアルタイム性を実現するためにタイムシェアリング方式(time sharing systems, TSS)を採用する場合に、従来の待ち合わせ問題と異なった形のモデルが解析される必要が出て来た。しかもスケジューリング方式によってモデルも大きく変化し、解析の方法も大きく変わる。

TSSに関する全般的な説明および待ち合わせ問題あるいはトラヒック問題をも含む解析が文献[Sc]に書かれている。CoffmanとKleinrockは、代表的なスケジューリング方式として

- (1) ラウンドロビン(Round Robin)方式
- (2) Foreground-Background方式
- (3) Processor-Shared方式

の3通りについて解析している([Cof1], [CK1], [CK2])。ただしポアソン到着、指数分布の処理時間のモデルである。ラウンドロビン方式について、さらに詳細な研究もあり([Fu1], [Fu2], [SNO], [NMT1], [NMT2], [TN1], [TN2], [AA1], [AA2], [K11], [K12], [K13])、優先権(priorities)をつけたラウンドロビン方式も解析されている([A], [AA3], [I1], [I2])。[K13]はProcessor-Shared方式も扱っている。いずれもポアソン到着、指数分布の処理時間のモデルである。ただし、スワッピング時間(swapping time)等の準備時間は固定長や一般分布の場合がある。

Foreground-Background方式についても、処理時間を一般分布にして系内呼数分布の解析がなされた([Fu3], [Fu4])。さらにForeground-Background方式が優先権のある2段の待ち行列を形成するのに対し、無限大の数の多段待ち行列を形成する多段帰還方式の待ち時間分布が解析された([Sch1], [STNO])。また、これまで呼種が1であったのに対し、一般に優先権のある多呼種の場合にまで拡張し、有限数の多段帰還方式が解析された([FG1], [FG2], [FG3])。さらに優先順位の最も低い最終段をラウンドロビン方式にしたモデルも解析されている([AA3])。

また上記の各種のスケジューリング方式を比較したり([CK3])、とくにスワッピング時間に注目して検討されている([Cof2], [Cof3], [K14])。ジョブの遂行中に、優先順位や優先度の型が変わる場合についての結果も得られている([Sch2])。

以上のスケジューリング方式に関する諸研究は、待ち行列理論に依る方法であったが、時間を細分し、どのジョブに割り当てるかという問題の形で検討している例もある([Ko], [CKW])。

一方、周辺系についても各装置について検討されている。2次メモリである磁気ディスク([ADW], [NMIH])、磁気ドラムについて([Cof4])も解析されている。2次メモリを含む入出力

装置と中央処理系の間を結ぶデータチャンネルに関して、そのバッファ容量を求める問題も扱われている（〔I_{NY}〕,〔I₃〕）。そのほか、通信制御装置に関する問題（〔H_{as1}〕,〔H_O〕）、マルチプレクサに関する解析（〔C_{hu}〕）、ページングに関する検討（〔K_{AH}〕,〔K_{an2}〕）もある。周辺系においては、各所にバッファメモリが必要となるため、バッファメモリの容量に関する解析が重要である。一般にデータ伝送においても問題とされている（〔H_{as2}〕,〔C_{oh}〕）。以上の周辺系の待ち合わせ問題は、現実の装置が存在し、その動作をうまくモデル化することが難かしいので、厳密な解析は行なえず、かなり荒い近似解析が多い。

最後に、情報処理システムの巨視的モデルの解析を概観する。Processor-Shared モデル（〔H_o〕）、一般にタイムシェアリングシステムの平均応答時間を求めるモデル（〔M_{on}〕）、循環待ち行列モデル（〔T_{an1}〕,〔T_{an2}〕）などがあり、シミュレーションを行なっている例（〔K_{an1}〕）もある。会話形処理モデルとして、帰還遅れを伴う帰還形待ち行列モデルが解析されている（〔N〕）。ただし、これは単一処理装置の場合のみを解析している。

7.2 本研究第Ⅱ部の目的と概要

情報処理システムにおける待ち合わせ問題は、前節で従来行なわれてきた研究の概要を述べたように、非常に沢山ある。とくに、大規模なシステムでは、複雑な待ち合わせ問題が多くなり、従来の研究結果、とくに既知の基本的待ち行列モデルの解析結果だけでは不十分である。問題を複雑にしている特徴を幾つかあげると、

- (i) 待ち行列の数が多数である。
- (ii) 処理装置（待ち行列理論では、待ち行列に対する扱者）の数が多数である。
- (iii) ある待ち行列で処理を受けた呼が、直ちに系を退去することなく、再び同じ待ち行列に戻ったり、他の待ち行列に加わる。すなわち帰還（feedback）性、あるいはタンデム性がある。
- (iv) 処理時間の分布等の、モデル条件も従来よく解析されてきた指数分布と異なることがあり、できるだけ一般化されたモデルに対する解析結果が必要である。
- (v) 待ち行列あるいは呼に優先権をつける場合がある。

などをあげることができる。いずれを取っても解決困難な点が含まれている。

本論文第Ⅱ部では、多くの待ち合わせ問題が考えられる中で、未解決な基本モデルの一つである $M/G/s$ モデル、TSS のスケジューリング方式の一つである多段帰還方式、会話形処理の巨視的なモデルの解析を取り上げる。

電子交換方式、データ通信においても、中央制御装置、中央処理装置を複数台設置するシステム構成が考えられている（〔K_{II}〕,〔K_{ann}〕）。これは、主として障害対策等の信頼度の面から検

討されている。システムの信頼度の問題も重要であるが、複数処理装置を用いる場合には、これに対する待ち行列モデルの解析結果も、とくにシステム評価の際に欠くことができない。たとえば、同一処理速度の2台の処理装置を持つシステムと、それらの2倍の処理速度の処理装置1台のシステムを比較すると、待ち合わせ率、平均待ち時間は前者の方が小さいこともある。さらに、現存する最高速度に近い装置を用いようとすれば、経済的な面でも、前者の方が有利なことが多い。複数処理装置に対する従来の解析は、前節でも述べたように、あまり十分でなく、基本的なモデルである $M/G/s$ の解析も未解決の問題である。

中央処理系における TSS のタスクスケジューリング方式に関する解析も、情報処理システムにおける問題の一つである。ラウンドロビン方式と多段帰還方式の2種類が考えられているが、多段帰還方式についてはその待ち行列の特徴、とくに待ち行列につけられる優先順位のために、待ち時間あるいは系内時間の解析は詳細に行なわれている。しかし、多段帰還方式に対する系内呼数の解析はあまり無い。多段帰還方式の一例である Foreground-Background 方式に対して解析されているだけである ([Fu3], [Fu4])。待ち時間あるいは系内時間は、情報処理システムの利用者が関心を持つ事項であり、一つの重要なサービス基準となる。一方、情報処理センタ側から見ると、そのシステム設計に当たり、記憶容量等のセンタ内の設備所要量と大きな関係を持つ系内呼数について説明しておく必要がある。

つぎに、スケジューリング方式も考慮した微視的な待ち合せ問題^やに対して、情報処理システム全体を大まかに見たモデルを考えることも有用である。会話形処理を行なうシステムに対するそのようなモデル化とその解析も、システム全体の動きを知る上で重要である。その場合、前述したように中央処理装置を2台以上設置することも考えられているので、マルチプロセッサによるシステムを取り上げる必要がある。

以上のような必要性あるいは目的に沿って、第Ⅱ部における研究がなされた。第Ⅱ部の各章の構成およびその概要はつぎの通りである。

第8章では、基本的待ち行列モデルの一つである $M/G/s$ を主として取り上げ、各処理装置の動作時間の確率過程としての性質を調べ、その同時分布を支配する方程式を求める。さらにこれらの動作時間分布と待ち時間分布との関係を得る。既知の理論結果と対比させるために、 $M/M/2$ 、 $M/D/2$ に対する数値解析も試みる。

第9章では、多段帰還方式の系内呼数を解析する。解析方法は隠れマルコフ連鎖の方法を用いる。量子終了直後の時点における状態方程式を立て、セミマルコフ過程の理論を用いて、任意時点における系内呼数分布を求める。

第10章においては多重処理装置による会話形処理モデルとして、帰還遅れを伴う帰還形待ち

行列モデルを考え、解析する。処理時間分布等は指数分布を仮定するので、いわゆる状態方程式による方法を用いる。系内呼数の平均、分散、平均系内時間も求める。

なお、第 8 章の内容は〔Y5〕,〔Y8〕,〔Y9〕をまとめたものである。

また第 9 章の内容は,〔Y1〕〜〔Y3〕,〔KY1〕,〔KY2〕をまとめた形で、その主要部分は〔Y4〕,〔YK〕として発表している。一部は電気通信研究所トラヒック研究室の川島幸之助社員との共同研究である。第 10 章の内容は〔Y6〕,〔Y7〕,〔Y10〕をまとめたものである。

第8章 複数処理装置における動作時間と待ち時間の解析

この章では、未解決な基本的な待ち行列モデルである、 $M/G/s$ モデルを主として扱う。今後、さらに解析を進める手掛りを得るための基礎的な解析を行ない、数値解析まで試みる。

各処理装置の動作時間を定義し、それらの確率過程としての性質を調べ、その同時分布を支配する方程式を求める。動作時間が s 次元のマルコフ過程となること、その分布の連続性、時間的な極限分布の存在、および任意時点と到着時点における分布が一致することを示す。また、定常分布の存在条件についても検討する。つぎに、動作時間と仮想的待ち時間の関係を述べ、動作時間分布から待ち時間分布が求められることを示す。最後に、数値解析を用いて、 $M/M/2$ 、 $M/D/2$ の動作時間分布、待ち時間分布を計算し、既知の理論結果とある範囲で、かなり一致することを確認する。ただし、境界条件の中に系内呼数分布の一部を用いるため、この境界条件を与えることは実用的には他の近似的な手段を考えることができるが、厳密な意味では解決すべき問題として今後に残された。

8.1 $M/G/s$ 待ち行列モデル

本章では、主として図 8.1 に示される、 $M/G/s$ 待ち行列モデルを扱う。呼は平均到着率 λ で待ち行列系にポアソン到着し、先着順に待ち行列を形成する。 s 台の処理装置 #1, ..., #s のどれかが空き次第、待ち行列の先頭の呼から順番に処理を受ける。処理終了後、呼は直ちに系

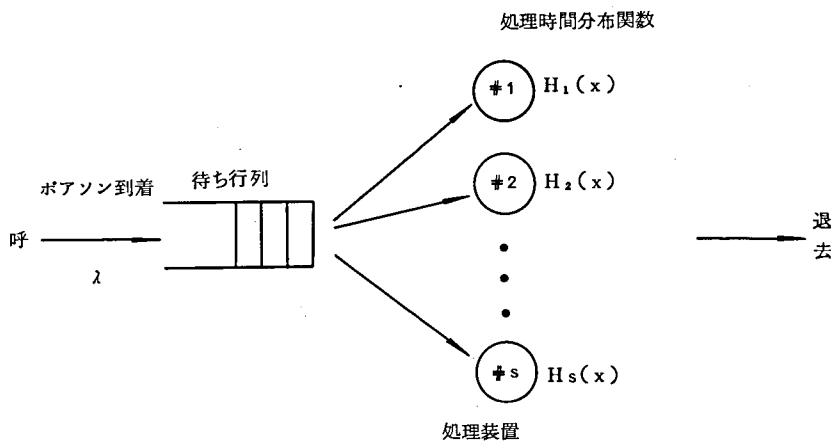


図 8.1 $M/G/s$ 待ち行列モデル

から退去する。各呼の処理開始時刻に、空き処理装置が1台以上あれば、待つことなく即刻その呼の処理が開始される。空き処理装置が2台以上あれば、その空き状態に応じた一定の確率で、その呼の処理装置が選択されるものとする。特別な場合としてランダム選択（すべての空き処理装置について等確率で選択される）、順序選択（たとえば、番号の小さい方が選択されるなど、一定の順序で選択される）も含まれる。これらを待ち規律（今の場合、先着順）に対して、選択規律と呼ぶことにする。これは、単一処理装置の場合には必要のない点であって、複数処理装置の場合に初めて問題となる。

処理装置 # i の処理時間 ξ_i は、系の状態、他の呼の処理時間とは独立で、各処理装置ごとに同一の一般分布関数

$$\text{Prob}\{\xi_i \leq x\} = H_i(x) \quad (i=1, \dots, s) \quad (8.1)$$

とする。なお、本章を通じて、解析の上で複雑になるだけで、実用上無意味な場合を除くため、

$$H_i(0) = 0 \quad (i=1, \dots, s) \quad (8.2)$$

および平均処理時間 h_i について

$$h_i = \int_0^{\infty} x dH_i(x) < \infty \quad (i=1, \dots, s) \quad (8.3)$$

と仮定する。 $\mu_i = 1/h_i$ を平均処理率と呼ぶことにする。

本章中、一部ではGI/G/sモデルも扱うが、とくに断わらない限り、上述のM/G/sモデルを考えているものとする。

8.2 処理装置の動作時間

単一処理装置のシステムで、待ち規律が先着順の場合には、本来概念としては異なる動作時間 (occupation time) ([Ta5]) と仮想的待ち時間 (virtual waiting time) ([Ta1], [Ta4], [Be]) が完全に同じ量となり、したがってそれらの分布も完全に同じである。本節では、処理装置ごとの動作時間を、仮想的待ち時間と分離して拡張定義し、その時間的変化の模様について述べる。

8. 2. 1 動作時間の定義

時刻 t における処理装置 $\#i$ の動作時間 (occupation time)* $\eta_i(t)$ は、時刻 t に $\#i$ が処理中の呼およびその時刻に待ち行列に並んでいる呼のうち $\#i$ によって処理される呼すべての処理が終了するまでの時間として定義される。

正確には、文献 [Ta1] において仮想的待ち時間を定義したのと同様にする。 $t=0$ で系が空状態のとき

$$\eta_i(0) = 0$$

として、 $t > 0$ に対して $\#i$ の処理を受ける呼の到着時点 (呼の到着の順番などによって処理装置が定まっているのではなく、前章で述べた待ち規律によって系の状態が変化して行き、結果的に見て $\#i$ の処理を受けることになる呼の到着時点を意味する) を

$$\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots \quad (0 < \tau_i^{(1)} < \tau_i^{(2)} < \dots)$$

とする。これらの時刻に到着した呼の処理時間をそれぞれ

$$\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots$$

とし、

$$\bar{\eta}_i(t) = \sum_{k: \tau_i^{(k)} \leq t}^{**} \xi_i^{(k)} - t \quad (8.4)$$

と置けば、

$$\eta_i(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} \{ \bar{\eta}_i(t) - \bar{\eta}_i(u) \} \quad (i=1, \dots, s) \quad (8.5)$$

として、動作時間を定義する。

上記の動作時間の定義と 8.1 のモデルの説明とから、明らかに

$$\eta_i(\tau_i^{(k)} - 0) \leq \eta_j(\tau_i^{(k)} - 0) \quad (i, j=1, \dots, s) \quad (8.6)$$

が成立する。ただし、 $i \neq j$ で上式の等号の成立するときは、選択規律に従って $\#i$ が選択されたことを意味する。また到着時点のすべての集合

$$\{ \tau_i^{(k)} \quad (i=1, \dots, s; k=1, 2, \dots) \}$$

は、ポアソン到着時点の集合となる。

* 単一処理装置のときには total occupation time と呼ばれる。意味からすれば、むしろ残り動作時間 (remaining occupation time) と言った方がよいかもしれない。

** $\sum_{k: \tau_i^{(k)} \leq t}$ を満足する k すべてに對する総和を表わす。

8.2.2 動作時間の時間的变化

動作時間の時間的变化の例を図 8.2 に示す。 $s = 2$ の場合で、図示されている時間の範囲内では、 $\tau_1(k)$, $\tau_2(k)$, $\tau_1(k+1)$, $\tau_1(k+2)$, $\tau_2(k+1)$ に到着した呼はそれぞれ、#1, #2, #1, #1, #2 により処理されることになる。それぞれ対応する時刻に、動作時間 $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ は、処理時間分だけ跳躍的に増加する。したがって、 $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ はこれらの点で不連続となるが、定義式 (8.5) によれば右連続となる。時刻 $\tau_1(k+2)$ に呼が到着したときには、#1, #2 ともに空き状態になっているので、選択規律によって #1 が選択された結果、到着呼の処理時間分 $\xi_1(k+2)$ だけ $\eta_1(t)$ が増加している。到着時点以外の時刻で、空き状態でもないときは 45 度の傾斜で、直線的に動作時間が減少する。

ここで、一般に s 台の処理装置の動作時間の時間的变化を正確に把握するため、十分小さな Δt $\Delta t > 0$ に対して、 $\eta_i(t + \Delta t)$ と $\eta_i(t)$ との関係を吟味する。

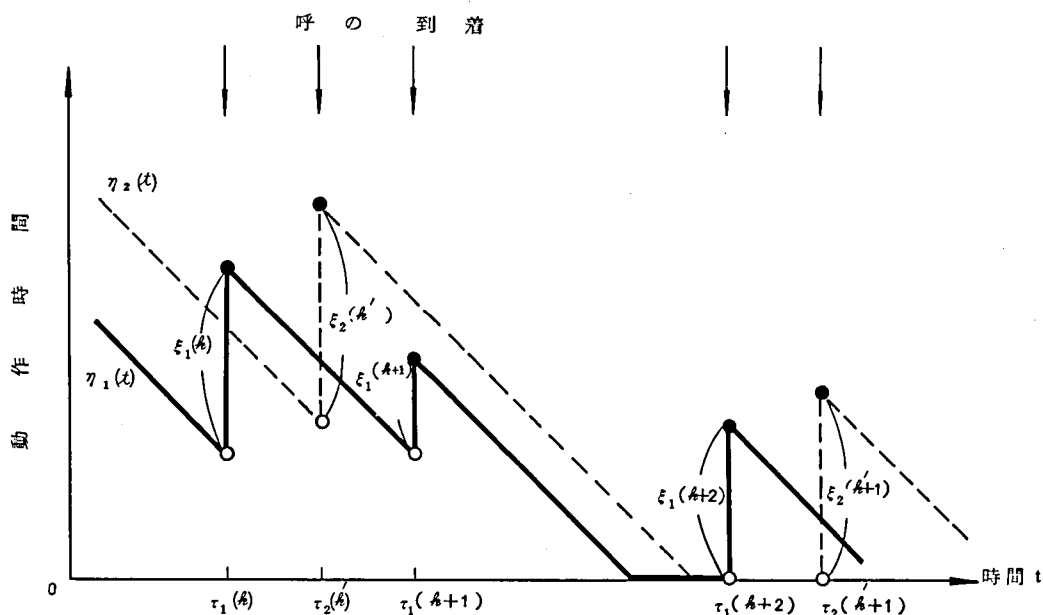


図 8.2 動作時間の時間的变化の例

- (i) $(t, t + \Delta t)$ の間に呼が到着しない場合
- (ii) $(t, t + \Delta t)$ の間に呼が 1 つ到着し、# i 以外の処理装置の動作時間が小さいか、最小の動作時間の処理装置が複数台あり、# i 以外の処理装置が選択された場合

以上2つの場合には

$$\eta_i(t + \Delta t) = \text{Max} \{ \eta_i(t) - \Delta t, 0 \} \leq \eta_i(t) \quad (8.7)$$

(Ⅲ) $(t, t + \Delta t)$ の間の時刻 $t + \tau$ ($0 < \tau \leq \Delta t$) に呼が1つ到着し、 $\#i$ が選択される場合

$$\begin{aligned} \eta_i(t + \Delta t) &= \text{Max} [\text{Max} \{ \eta_i(t) - \tau, 0 \} + \xi_i - (\Delta t - \tau), 0] \\ &\leq \eta_i(t) + \xi_i \end{aligned} \quad (8.8)$$

ただし、到着呼の処理時間を ξ_i と置いた。

以上3つの場合以外に、

(Ⅳ) $(t, t + \Delta t)$ の間に2つ以上の呼が到着する場合も考えられるが、これは微小な確率でしか起らない。

8.3 動作時間の分布

8.3.1 確率連続性

前節の考察によれば、到着呼が $\#i$ によって処理されるのであれば、その呼の到着時刻に $\eta_i(t)$ は処理時間分だけ跳躍的に増加するので、 $\eta_i(t)$ は見本過程がほとんど不連続(ただし右連続)である。ところが、確率連続であることを述べる。

時間間隔 $(t, t + \Delta t)$ ($\Delta t > 0$) の間に到着する呼が0, 1, 2以上の確率は、ポアソン到着の仮定によりそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda \Delta t} &= 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t^2) \\ \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} &= \lambda \Delta t + O(\Delta t^2) \\ 1 - e^{-\lambda \Delta t} (1 + \lambda \Delta t) &= O(\Delta t^2) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

となる。前節の(Ⅰ)~(Ⅳ)の場合を考慮して $|\eta_i(t + \Delta t) - \eta_i(t)|$ の期待値を評価すれば

$$\begin{aligned} E \{ |\eta_i(t + \Delta t) - \eta_i(t)| \} &\leq \Delta t \{ 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t^2) \} + (\Delta t + h_i) \{ \lambda \Delta t + O(\Delta t^2) \} + (\Delta t + h_i) O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (8.10)$$

が得られる。 t に依らない任意の定数 $\epsilon > 0$ に対して

$$E \{ |\eta_i(t + \Delta t) - \eta_i(t)| \geq \epsilon \text{Prob} \{ |\eta_i(t + \Delta t) - \eta_i(t)| > \epsilon \} \quad (8.11)$$

が成立するので、(8.10), (8.11)式から

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Prob} \{ |\eta_i(t + \Delta t) - \eta_i(t)| > \epsilon \} = 0 \quad (8.12)$$

が得られる。一方、 $\Delta t < 0$ の場合も同様にして(8.12)式が成立する。したがって、 $\eta_i(t)$ は確率連続である。

8.3.2 分布を支配する方程式

これまでの動作時間に関する考察をもとに、各処理装置の動作時間 $\eta_1(t), \dots, \eta_s(t)$ の同時分布関数

$$\Phi(x_1, \dots, x_s; t) \equiv \Phi(\mathbf{x}; t) = \text{Prob} \{ \boldsymbol{\eta}(t) \leq \mathbf{x} \} \quad (8.13)$$

を支配する方程式を導く。ただし、ベクトル記号

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_s(t))$$

を用い、ベクトル間の等号、不等号および演算、およびスカラー量との演算は、通常のように要素ごとに成立するものを用いる。

各処理装置の動作時間の変化をもたらす要因は、時間の経過、呼の到着、到着呼の処理時間のみである。これまでの考察から、 $\boldsymbol{\eta}(t)$ は s 次元のマルコフ過程となる。 $\Phi(\mathbf{x}; t)$ の微小時間 $\Delta t > 0$ における変化を考えると

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}; t + \Delta t) &= (1 - \lambda \Delta t) \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{u} \Delta t; t) + \lambda \Delta t \sum_{i=1}^s I_i(\mathbf{x}; t) + O(\Delta t^2) \\ (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

となる。ただし

$$\mathbf{u} = (1, \dots, 1), \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{x}; t) &= \text{Prob} \{ \eta_i(t) \leq \eta_j(t) \leq x_j \ (j \neq i); \eta_i(t) + \xi_i \leq x_i; \#i \text{ が選択される} \} \\ (i = 1, \dots, s) \end{aligned} \quad (8.15)$$

とする。(8.14)式の右辺第1項は、呼の到着が無く、時間の経過した分だけ動作時間が減少する場合である。その第2項は、呼の到着した場合である。(8.15)式に示されている $I_i(\mathbf{x}; t)$ は、呼が到着したという条件下で、その呼が $\#i$ で処理される確率に対応し、 $\Phi(\mathbf{x}; t)$ と $\#i$ の処理時間分布関数 $H_i(x)$ との条件つき畳み込み (convolution) である。(8.13), (8.15)式を比較すれば、

$$\sum_{i=1}^s I_i(\mathbf{x}; t) \leq \Phi(\mathbf{x}; t)$$

が明らかに成立する。

各変数 x_i , t について $\Phi(\mathbf{x}; t)$ の偏微分可能性を仮定すれば、(8.14)式で $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取り、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}; t) = \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}; t) + \lambda I_i(\mathbf{x}; t) \right\} - \lambda \Phi(\mathbf{x}; t) \quad (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \quad (8.16)$$

が得られる。(8.16)式が、確率過程としての動作時間を規定する方程式であり、一般のマル

コフ過程で成立するKolmogorovの前向き方程式の例になっている。

$s=1$ の場合には、仮想的待ち時間に対するTakácsの得た式([Ta 4])と完全に一致する。彼は、時間変数 t についてラプラス変換、変数 x_1 についてラプラス・スチルチェス変換を用いて、上記のような方程式をまとめ、その解を求めることができた。

時間的な極限分布 $\Phi(x; \infty)$ の存在することは後述するとして、もしその存在を仮定すれば

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x; t) = 0 \quad (8.17)$$

とできる。そのとき、 $\Phi(x; t)$, $I_i(x; t)$, $\eta_i(t)$ 等は t に無関係となるので、 t を落して表示すると、(8.16), (8.15)式から、

$$\sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) + \lambda I_i(x) \right\} - \lambda \Phi(x) = 0 \quad (x \geq 0) \quad (8.18)$$

$$I_i(x) = \text{Prob} \{ \eta_i \leq \eta_j \leq x_j (j \neq i); \eta_i + \xi_i \leq x_i; \#i \text{ が選択される} \} \quad (i=1, \dots, s) \quad (8.19)$$

となる。これが定常状態に対する、動作時間分布を支配する方程式である。

$I_i(x; t)$, $I_i(x)$ はそれぞれ、 $\Phi(x; t)$, $\Phi(x)$ と $H_i(x_i)$ を用いた積分の形で表わすことができ、(8.16), (8.18)式は、偏微分、多重積分の方程式となる。これらは微積分方程式が求解困難な上に、多変数である困難さも加わって一層、解析的に解くことは難しい。その最大の原因は、 $I_i(x; t)$, $I_i(x)$ 等が条件付きの畳み込みとなっているため、変数 x_i が互いに影響を及ぼし合うためと思われる。(8.16), (8.18)式はいずれも、それぞれ $\Phi(x; t)$, $\Phi(x)$ の線形方程式であり、恒等的に0という特解を持つことは明らかである。

なお、 $\Phi(x; t)$ は定義により、一般の分布関数としての性質を満足する以外に、少なくとも1変数 x_i につき $x_i < 0$ であれば

$$\Phi(x; t) = 0$$

である。(8.18), (8.19)式の $s=2$ の場合の例は、8.7で示される。

8.3.3 分布の連続性

(8.14)式から(8.16)式を導くとき、 $\Phi(x; t)$ の偏微分可能性を仮定した。これを直接証明することはできないが、ここで各変数 x_i , t についての連続性を証明する。 t についての連続性は、8.3.1で述べた確率連続性から明らかに成立する。

(8.14)式から $\Delta t > 0$ に対して

$$\Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x + u\Delta t; t) = 0 \quad (8.20)$$

が成立し、さらに $\Delta t < 0$ に対しても $x, x + u\Delta t > 0$ である限り、同じ式が成立する。そこで

$$\begin{aligned} & \Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x + u\Delta t; t) \\ &= \{ \Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x + u\Delta t; t + \Delta t) \} + \{ \Phi(x + u\Delta t; t + \Delta t) - \Phi(x + u\Delta t; t) \} \end{aligned} \quad (8.21)$$

の形に分解して、(8.20)式と確率連続性を考慮すれば、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ \Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x + u\Delta t; t + \Delta t) \} = 0 \quad (8.22)$$

が成立する。ゆえに、 $x > 0$ のとき、各 x_i につき、 $\Phi(x; t)$ は連続である。また $x > 0$ の領域の境界上でも、定義により各変数について右連続である。

なお、上述した分布の連続性も、故意に導入された初期分布に対しては成立しない。たとえば、各処理装置が一定の動作時間を課された状態から系が始まる場合に、初期分布関数は明らかに不連続となる。しかし、少しでも時間が経過すれば、すぐに連続的となる。

8.3.4 極限分布の存在

ここで、 $t = 0$ に空状態としたとき $t = \infty$ の動作時間の極限分布 $\Phi(x; \infty)$ の存在することを示す。

完全に同一条件の $M/G/s$ 待ち行列モデルで、動作時間の2つの確率過程 $\Phi_1(x; t)$ 、 $\Phi_2(x; t)$ を考える。すべての x について

$$\Phi_1(x; t) \geq \Phi_2(x; t)$$

であれば、 $\Delta t > 0$ として、(8.14)式から

$$\Phi_1(x; t + \Delta t) \geq \Phi_2(x; t + \Delta t)$$

となる。ゆえに、初期分布における大小関係は、その後の分布でも維持される。

つぎに、多変数の階段関数を

$$u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (8.23)$$

として、初期条件

$$\Phi'(x; 0) = u(x - y) \quad (y \geq 0)$$

の確率過程 $\Phi'(x; t)$ を考えると

$$\Phi(x; t + \Delta t) - \Phi(x; t) = \int \{ \Phi'(x; t) - \Phi(x; t) \} d\Phi(y; \Delta t) \quad (8.24)$$

が成立する。ただし、上式右辺の積分は、すべての y について取られる。ところが、

$\Phi(x; 0) \geq \Phi'(x; 0)$ であるから、

$$\Phi'(x; t) \leq \Phi(x; t)$$

が成立し、(8.24)式から

$$\Phi(x; t + \Delta t) \leq \Phi(x; t)$$

が得られる。この式は、時間 t についての単調性を示している。一方 $\Phi(x; t)$ は確率測度であるから、 $\Phi(x; t) \geq 0$ がつねに成立する。この有界性と、上述の単調性ことから、ルベークの収束定理が適用でき、極限分布

$$\Phi(x) = \Phi(x; \infty) \quad (8.25)$$

が証明できた。

なお、 $x > 0$ のときの $\Phi(x)$ の連続性および、その領域の境界上での右連続性も、8.3.3の結果から明らかに成立する。

8.4 到着時点および任意時点における分布

GI/G/s 待ち行列モデル（処理時間は同一の分布）の系内呼数分布に関する Finch の結果 ([Fi]) を、M/G/s モデルに適用すれば、呼の到着直前の時点（単に到着時点と呼ぶことにする）および任意時点における系内呼数分布は完全に一致する。また M/G/1 モデルでは、待ち時間と仮想的待ち時間、したがって到着時点と任意時点における動作時間の分布が完全に一致することは、別々にこれらの分布を求めて比較することにより、示されている ([Ta1])。これらは、いずれもポアソン到着の場合であり、ポアソン分布が考えている時間間隔のみに依存し、系の状態、とくにこれまでの系の経過に依存しないことが効いているものと思われる。

ここでは、8.1 で述べた、処理時間分布が処理装置により異なる M/G/s モデルの動作時間の到着時点における極限分布が存在すると仮定したとき、到着時点と任意時点における分布が完全に一致することを示す。なお、到着時点における動作時間の極限分布とは、 n 番目の到着時刻を τ_n として

$$\Phi_\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x; \tau_n) \quad (8.26)$$

を意味する。したがって

$$\Phi(x) = \Phi_\tau(x) \quad (8.27)$$

を証明する。

Kiefer ら ([KW 1]) が GI / G / s モデルに対する待ち時間分布に関する研究を行なう途中の段階で、 $\Phi_T(x)$ に相当する分布関数についても検討している。ただし、扱っているモデルでは処理時間分布が同一であり、待ち時間分布について検討し易いように、動作時間の小さい順番に、変数の入れ換えをしている。説明の都合上、到着間隔の分布がたがいに独立で、同一の一般分布関数 $A(x)$ とする以外は、8.1 で述べた条件の GI / G / s モデルを考える。このとき、極限分布の存在を仮定すると

$$\Phi_T(x) = \int_{-0}^{\infty} \sum_{i=1}^s I_{iT}(x+ut) dA(t) \quad (8.28)$$

が成立する。ただし、 $I_{iT}(x)$ は (8.19) 式で定義される $I_i(x)$ と同じ形式である。ただし η_i, η_j 等は、到着時点における動作時間とする。したがって、 $I_{iT}(x)$ は $\Phi_T(x)$ を含む積分の形で書くことができ、(8.28) 式は相続く 2 つの到着時点における動作時間分布の推移を表わす、一種の状態方程式である。

一方、ある到着時点から、つぎの到着時点までの間の任意時点までの時間間隔の分布関数は

$$A'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \lambda \int_0^x \{1 - A(t)\} dt & (x \geq 0) \end{cases} \quad (8.29)$$

である。ただし、平均到着間隔は

$$1/\lambda = \int_{-0}^{\infty} \{1 - A(t)\} dt < \infty$$

とする。したがって

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^s I_{iT}(x+ut) dA'(t) \\ &= \lambda \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^s I_{iT}(x+ut) \{1 - A(t)\} dt \end{aligned} \quad (8.30)$$

となる。これが、到着時点における分布と、任意時点における分布の関係である。上述したように、到着時点における分布は、右辺の $I_{iT}(x)$ の中に積分の形で含まれている。

ところが、ポアソン到着の場合には

$$A'(t) = A(t) \quad (8.31)$$

であり、(8.28)、(8.30) 式を比較すれば、(8.27) 式が得られ、目的の証明がなされた。

さらに、この結果から M / G / s モデルの動作時間分布を支配する方程式として、(8.18) 式の代わりに

$$\Phi(x) = \int_{-0}^{\infty} \sum_{i=1}^s I_i(x+ut) \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (8.32)$$

を採用することもできる。

8.5 定常分布の存在条件

極限分布の存在することは、8.3.4で述べた。しかし、 $\Phi(x)$ が真の分布関数になるとは限らない。たとえば、到着率 λ が非常に大きいと、任意の有限の x に対して、

$$\Phi(x) = 0$$

となる可能性がある。これは、8.3.2の末尾の方で触れた、(8.18)式の特解でもある。

そこで、 $\Phi(\infty, \dots, \infty) = 1$

を満足する、すなわち $\Phi(x)$ が定常分布(平衡分布)となる条件を吟味する。前節で用いた GI/G/s モデルを考える。

各処理装置 # i の平均処理率が μ_i であるから、待ち行列に呼があって、すべての処理装置が処理を続けている状態を考えれば、系全体の最大処理率は

$$\sum_{i=1}^s \mu_i$$

である。したがって、平均到着率 λ が

$$\lambda > \sum_{i=1}^s \mu_i \quad (8.33)$$

を満たすとき、平均的に見て待ち行列の長さは漸次増加して行く。したがって、すべての処理装置の動作時間も平均して増加するので、定常分布は存在し得ない。ゆえに、(8.33)の逆を取

$$\text{って} \quad \lambda \leq \sum_{i=1}^s \mu_i \quad (8.34)$$

が、定常分布の存在する必要条件である。この式で、等号の成立するとき、確率1で定常分布の存在する例は文献 [KW1] にある D/D/s モデルをあげることができる。

完全な証明を与えることはできないが、おそらく

$$\lambda < \sum_{i=1}^s \mu_i \quad (8.35)$$

が定常分布の存在する十分条件であると思われる。同じく GI/G/s モデルの場合に、その根拠をつぎに示そう。

図 8.1 のモデルの代りに、図 8.3 のように、分布関数 $A(x)$ の到着間隔で到着する呼を、独立な確率 r_i で処理装置 # i に割り当てるモデルを考える。ただし

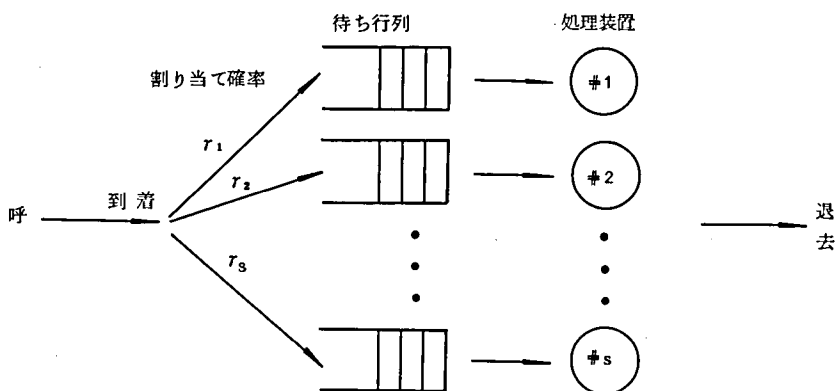


図 8.3 独立に割り当てるモデル

$$\sum_{i=1}^s r_i = 1$$

とする。図 8.1 のモデルでは、共通に 1 つの待ち行列が生じ、その先頭から処理されたのに対し、図 8.3 のモデルは、到着と同時に呼が振り分けられるので、各処理装置ごとに待ち行列が生ずる。各処理装置の動作時間の大小に拘らず、処理を割り当てるので、処理能率は図 8.1 の場合より劣ると考えられる。すなわち、他の処理装置が空いていても割り当て通り特定の処理装置が空くまで待つ呼が出て来る。処理装置 # i への到着間隔の分布関数は、

$$r_i \sum_{j=0}^{\infty} (1-r_i)^j A(x)^{*j}$$

で、平均到着間隔は

$$1/(r_i \lambda)$$

となる。ここで、 $A(x)^{*j}$ は $A(x)$ の j 重の畳み込みである。処理装置 # i の到着時点における動作時間、したがって待ち時間（次節参照）の定常分布の存在する十分条件として、

$$r_i \lambda < \mu_i \quad (8.36)$$

がある。これは一般の GI / G / 1 モデルに対する条件である。ところが、

$$\gamma_i = \mu_i / \sum_{i=1}^s \mu_i \quad (8.37)$$

とすれば、(8.35)式が満たされているとき、(8.36)式が満たされる。したがって各処理装置ごとに定常分布が存在する。

以上のところまでの結論は完全に正しい。これから、証明できないが、つぎのように推量できる。能率の悪い図8.3のモデルに対しても、(8.35)式が満足されるとき、各処理装置ごとに到着時点における動作時間の定常分布がある。そこで、それらの同時分布も定常分布となり、より能率のよい図8.1のモデルでも、定常分布を持つ。しかも、前節の結果を用いれば任意時点の動作時間も定常分布を持つと考えられる。

なお、Kiefer らは到着時点における動作時間を小さい順に並べたものの極限分布の一意性、すなわちエルゴード性を証明したが、ここでは証明できなかった。しかし、これも条件(8.35)式が成立すればおそらくエルゴード性を持つと思われる。

8.6 待ち時間とその分布

前節までは、各処理装置ごとに動作時間を考察して来た。本節では、動作時間、仮想的待ち時間、真の待ち時間の定義およびそれらの関係、さらにそれらの分布の関係について述べる。

時刻 t における仮想的待ち時間 $\omega(t)$ とは、もし時刻 t に呼が到着したならば、その呼が待たされる時間を言う。したがって $\omega(t)$ は全処理装置の動作時間の最小値となる。すなわち

$$\omega(t) = \min_i \eta_i(t-0) \quad (8.38)$$

となる。

さらに、時刻 t として真の到着時点 τ を取れば、

$$\omega(\tau) = \min_i \eta_i(\tau-0) \quad (8.39)$$

がその呼の真の待ち時間となる。

仮想的待ち時間の分布関数を

$$W(x; t) = \text{Prob}\{\omega(t) \leq x\} \quad (8.40)$$

によって定義すれば、(8.38)式を考慮して

$$W(x; t) = \text{Prob}\left\{\min_i \eta_i(t-0) \leq x\right\} = \sum_{i=1}^s \text{Prob}\{x \geq \eta_i(t-0) \leq \eta_j(t-0) \mid (j \neq i); \#i \text{ が選択される}\} \quad (8.41)$$

となる。したがって、動作時間の分布関数 $\phi(x; t)$ を用いて、 $W(x; t)$ を表わすことができる。動作時間の等しい場合に、選択される確率が、そのときの空き状態により種々であるので、

一般の s のときの (8.41) 式の形を、 $\Phi(x; t)$ によって実際に書き下すことはしない。ただし、 $s = 2$ の場合には簡単であって

$$W(x; t) = \Phi(x, \infty; t) + \Phi(\infty, x; t) - \Phi(x, x; t) \quad (8.42)$$

となる。

$\Phi(x; t)$ の極限分布 $\Phi(x)$ が存在するので、 $W(x; t)$ の極限分布

$$W(x) = W(x; \infty) \quad (8.43)$$

も勿論存在し、一般の s のとき

$$W(x) = \sum_{i=1}^s \text{Prob}\{x \geq \eta_i \leq \eta_j \ (j \neq i); \#i \text{ が選択される}\} \quad (8.44)$$

とくに $s = 2$ のときには

$$W(x) = \Phi(x, \infty) + \Phi(\infty, x) - \Phi(x, x) \quad (8.45)$$

が成立する。 $\Phi(x)$ が定常分布となれば、 $W(x)$ も定常分布となる。また、 $\Phi(x; t)$ の連続性から $W(x; t)$ の連続性も出る。すなわち、すべての t および $x \neq 0$ のとき $W(x; t)$ は連続で、 $x = 0$ では右連続である。

$M/G/s$ モデルでは、動作時間の分布が任意時点と到着時点で一致することを 8.4 で示したので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}\{\omega(t) \leq x\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{Prob}\{\omega(\tau) \leq x\}$$

となり、結局 $W(x)$ は仮想的待ち時間の分布関数であると同時に、真の待ち時間の分布関数でもある。したがって待ち時間の分布関数は、(8.44)、(8.45) 式で与えられる。

8.7 数値解析

動作時間分布を支配する方程式 (8.16) または (8.18) 式を解析的に解くことは困難なので、数値解析により、動作時間の定常分布を求め、これから待ち時間の分布を求める試みを行なう。実際に数値解析を行なう対象は、 $M/M/2$ 、 $M/D/2$ モデルで、同一の処理時間分布の場合である。これらの既知の待ち時間分布と数値解析結果を比較する。

8.7.1 $s = 2$ の場合の方程式

$s = 2$ のとき (8.18) 式は

$$\sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2) + \lambda I_i(x_1, x_2) \right\} - \lambda \Phi(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1, x_2 \geq 0) \quad (8.46)$$

となり、上式中の $I_i(x_1, x_2)$ は (8.19) 式から

$$\left. \begin{aligned} I_1(x_1, x_2) &= \text{Prob} \{ \eta_1 \leq \eta_2 \leq x_2 ; \eta_1 + \xi_1 \leq x_1 ; \#1 \text{ が選択される} \} \\ I_2(x_1, x_2) &= \text{Prob} \{ \eta_2 \leq \eta_1 \leq x_1 ; \eta_2 + \xi_2 \leq x_2 ; \#2 \text{ が選択される} \} \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

である。(8.47)式を、 $\Phi(x_1, x_2)$ を用いた形で表わすと、2変数のスチルチエス積分も用いて

$$\left. \begin{aligned} I_1(x_1, x_2) &= \int_{\substack{x_1 \geq y_1 \geq y_2 \leq x_2 \\ (y_1, y_2) \neq (0, 0)}} H_1(x_1 - y_1) d^2 \Phi(y_1, y_2) + \gamma_1 H_1(x_1) \Phi(0, 0) \\ I_2(x_1, x_2) &= \int_{\substack{x_1 \geq y_1 \geq y_2 \leq x_2 \\ (y_1, y_2) \neq (0, 0)}} H_2(x_2 - y_2) d^2 \Phi(y_1, y_2) + \gamma_2 H_2(x_2) \Phi(0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

となる。ただし、 $d^2 \Phi(y_1, y_2)$ は変数 y_1, y_2 についての2階微分である。また、 γ_i は、両方の処理装置が空きのとき到着した呼が処理装置 $\#i$ によって処理される確率で、

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

を満足する。(8.48)式を導く際に、 $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ のときの $\Phi(y_1, y_2)$ の連続性(8.3.3参照)を利用している。右辺第1項の積分で、その積分領域から原点を除いたのは、上述したように、両方の処理装置が空きのとき呼が到着した場合を、別に第2項として加えるためである。(8.48)はさらにつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} I_1(x_1, x_2) &= \int_{y_1=+0}^{\text{Min}(x_1, x_2)} \int_{y_2=y_1}^{x_2} H_1(x_1 - y_1) d^2 \Phi(y_1, y_2) \\ &\quad + H_1(x_1) \{ \Phi(0, x_2) - \Phi(0, 0) \} + \gamma_1 H_1(x_1) \Phi(0, 0) \\ I_2(x_1, x_2) &= \int_{y_2=+0}^{\text{Min}(x_1, x_2)} \int_{y_1=y_2}^{x_1} H_2(x_2 - y_2) d^2 \Phi(y_1, y_2) \\ &\quad + H_2(x_2) \{ \Phi(x_1, 0) - \Phi(0, 0) \} + \gamma_2 H_2(x_2) \Phi(0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

($x_1, x_2 \geq 0$)

とくに、

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2, \quad H_1(x) = H_2(x) \equiv H(x) \quad (8.50)$$

のときには、 $\Phi(x_1, x_2)$ が対称関数となるので

$$\left. \begin{aligned} I_1(x_1, x_2) &= \int_{y_2=+0}^{x_2} \int_{y_1=y_2}^{x_2} H(x_1 - y_2) d^2 \Phi(y_1, y_2) + H(x_1) \left\{ \Phi(x_2, 0) - \frac{1}{2} \Phi(0, 0) \right\} \\ I_2(x_1, x_2) &= \int_{y_2=+0}^{x_2} \int_{y_1=y_2}^{x_1} H(x_2 - y_2) d^2 \Phi(y_1, y_2) + H(x_2) \left\{ \Phi(x_1, 0) - \frac{1}{2} \Phi(0, 0) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (x_1 \geq x_2 \geq 0) \quad (8.51)$$

となる。積分中の $\Phi(y_1, y_2)$ も $y_1 \geq y_2$ に対する値のみで表わした。今後は、(8.50)式の成立する場合だけを扱う。

(8.46)式中の微分および積分を、差分を用いた近似式で表わせば、数値解析に移れるが、ここではそれと全く等価な方法を取る。すなわち、(8.46)式を導出して来た、もとの式(8.14)で

$$\Phi(x; t) = \Phi(x; t + \Delta t) \equiv \Phi(x)$$

と置いて、高位の無限小を無視した近似式

$$\Phi(x_1, x_2) = (1 - \lambda \Delta t) \Phi(x_1 + \Delta t, x_2 + \Delta t) + \lambda \Delta t \sum_{i=1}^2 I_i(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2, \Delta t \geq 0) \quad (8.52)$$

が得られるので、これを用いる。なお、単に(8.46)式を差分を用いて書いた近似式から、数値計算した結果も、(8.52)式を用いた場合でも精度はあまり差がなかった。ただし、近似式の形は、(8.52)式を用いた方が簡単である。

Δt を周期とする離散的な格子点

$$(x_1, x_2) = ((j-1)\Delta t, (k-1)\Delta t) \quad (j, k=1, \dots, N+1)$$

における値のみを用いて

$$\left. \begin{aligned} Q(j, k) &= \Phi((j-1)\Delta t, (k-1)\Delta t) \\ J_i(j, k) &= I_i((j-1)\Delta t, (k-1)\Delta t) \quad (i=1, 2) \\ K(j) &= H((j-1)\Delta t) \end{aligned} \right\} \quad (j, k=1, \dots, N+1) \quad (8.53)$$

という記号で表わす。 x_1, x_2 の値は $N\Delta t$ 以下の範囲しか考えないことにする。(8.52)式から

$$Q(j+1, k+1) = \left\{ Q(j, k) - \lambda \Delta t \sum_{i=1}^2 J_i(j, k) \right\} / (1 - \lambda \Delta t) \quad (j, k=1, \dots, N+1) \quad (8.54)$$

が得られる。

$$d^2 \Phi(y_1, y_2) = \Phi(y_1 + \Delta t, y_2 + \Delta t) + \Phi(y_1, y_2) - \Phi(y_1 + \Delta t, y_2) \\ - \Phi(y_1, y_2 + \Delta t)$$

の形の近似式を用いると、(8.54)式中の $J_i(j, k)$ は、(8.51)式から

$$\left. \begin{aligned} J_1(j, k) &= \sum_{l=1}^{k-1} K(j-l+1) \{ Q(k, l+1) + Q(l, l) - Q(k, l) - Q(l+1, l) \} \\ &\quad + K(j) \{ Q(k, 1) - \frac{1}{2} Q(1, 1) \} \\ J_2(j, k) &= \sum_{l=1}^{k-1} K(k-l+1) \{ Q(j, l+1) + Q(l, l) - Q(j, l) - Q(l+1, l) \} \\ &\quad + K(k) \{ Q(j, 1) - \frac{1}{2} Q(1, 1) \} \quad (j \geq k \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

とする。(8.54)、(8.55)式を $1 \leq k \leq j \leq N+1$ の範囲で繰り返し用いて数値計算すればよい。これらの近似による数値解析は、非常に荒い方法である。たとえば、(8.55)式で表わされる部分は、差分を用いた単なる和であって何ら修正項を付け加えていない。

なお、数値解析する上での境界条件である、 $\Phi(x_1, 0) = Q(j, 1)$ の値は、上記の式から決定できないので、別に与える必要がある。

8.7.2 境界条件

$s=2$ で、条件(8.50)が満足されている場合には、平均処理時間を h と置き、任意時点における系内呼数が i である確率を p_i とすれば、

$$\Phi(x_1, 0) = p_0 + \frac{p_1}{2h} \int_0^{x_1} \{1 - H(x_1)\} dx_1 \quad (x_1 \geq 0) \quad (8.56)$$

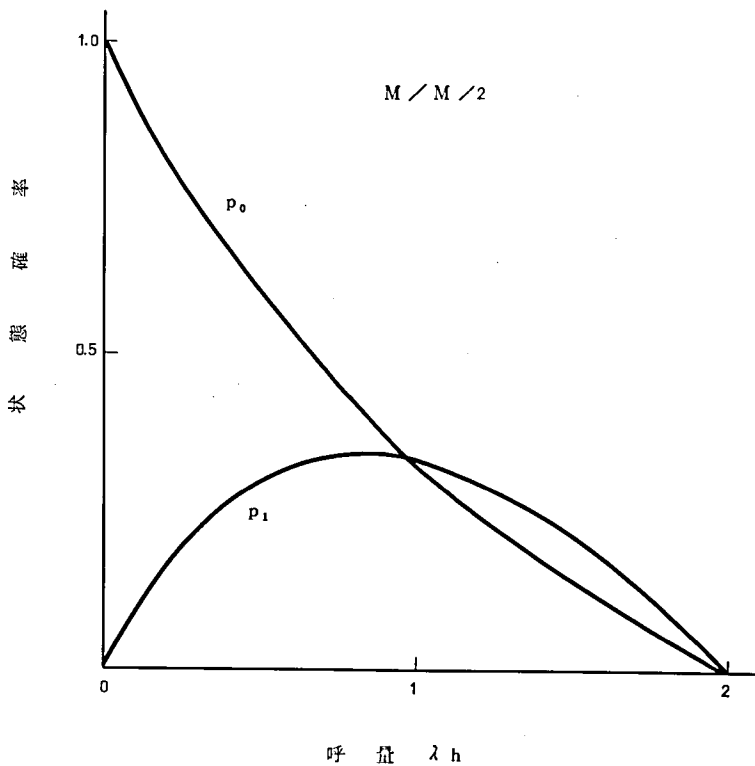
が成立する。系の対称性を考えると、系内呼数が1であって、#1が処理中の確率は $p_1/2$ であり、任意時点で処理中のときその処理の残り時間の分布関数は、上式第2項の残りの部分で与えられる。

(8.56)式が、境界条件を与える式である。一般の s の場合および非対称な系の場合にも、同様の式で境界条件が与えられると思うが、どの処理装置が処理中であるかを指定した確率が必要となる。なお処理時間分布が同一の場合に、確率 p_i の存在することは、Finch([Fi])によつて保証されている。しかし、実際に p_i の値を計算する方法は現在のところ与えられていない。処理時間分布が異なる場合も含めて、これらの値を計算する実際的な解決法としてつぎの2つが考えられる。

(1) シミュレーションにより求めておく。

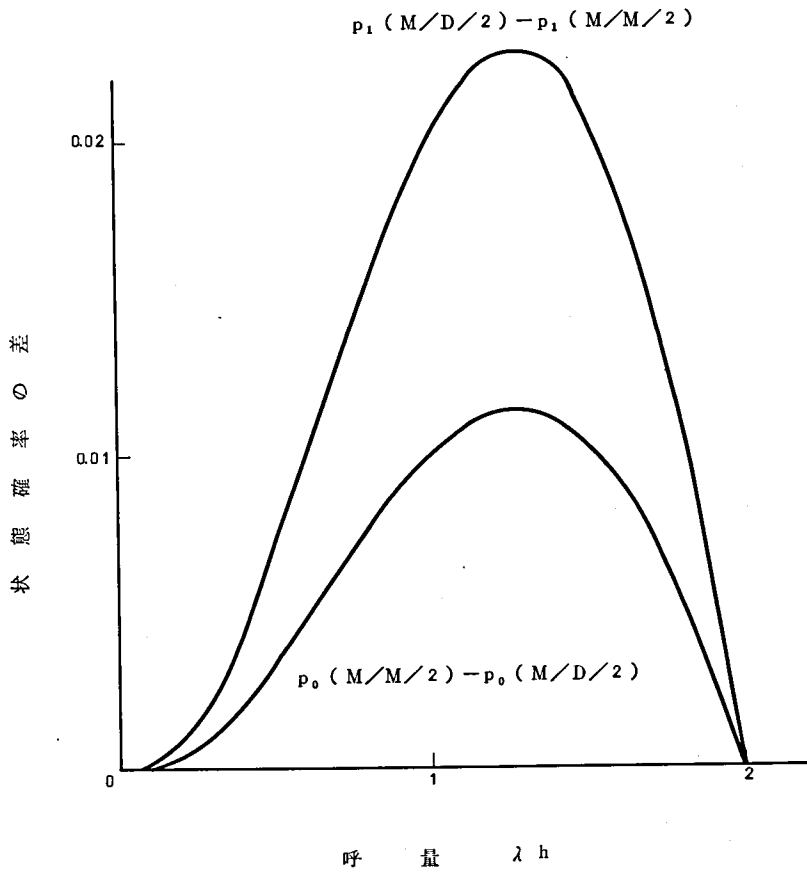
(ii) $M/M/s$, $M/D/s$ など既知の解析結果を近似値として利用する。

たとえば, (ii) の場合の参考値として, 比較的大きく異なる特性を持つと思われる, $M/M/2$, $M/D/2$ モデルの p_0 , p_1 の値を比較すると, 図 8.4 (a), (b) のようになる。



(a) $M/M/2$ の状態確率

図 8.4 $M/M/2$, $M/D/2$ の p_0 , p_1 の比較



(b) $M/M/2$, $M/D/2$ の状態確率の差

図 8.4 $M/M/2$, $M/D/2$ の p_0 , p_1 の比較

$\lambda h = 1.8$ のとき,

$$M/M/2 : p_0 = 0.0526, p_1 = 0.0947$$

$$M/D/2 : p_0 = 0.0471, p_1 = 0.1058$$

であって、差の大きい上の条件の場合でも、1割くらいの誤差があるだけである。 λh の値が小さいと、誤差はさらに小さい。したがって、 $M/M/2$, $M/D/2$ に対する確率値を流用することも一つの解決策であろう。

(8.56) 式は、 $M/M/2$ のとき

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, 0) &= p_0 + \frac{p_1}{2} (1 - e^{-x_1/h}) \quad (x_1 \geq 0) \\ p_0 &= 1 / \{ 1 + \lambda h + (\lambda h)^2 / (2 - \lambda h) \}, \quad p_1 = \lambda h p_0 \end{aligned} \quad (8.57)$$

となり, $M/D/2$ のとき

$$\Phi(x_1, 0) = \begin{cases} p_0 + \frac{p_1 x_1}{2h} & (0 \leq x_1 < h) \\ p_0 + p_1/2 & (x_1 \geq h) \end{cases} \quad (8.58)$$

$$p_0 = -(2 - \lambda h)z / (1 - z), \quad p_1 = (2 - \lambda h)(1 + z) / (1 - z)$$

となる。ただし, z は

$$1 - z^2 - e^{-\lambda h(1-z)} = 0$$

の $|z| < 1$ を満たす根である。

(8.53) 式で定義される記号を用いて, (8.57), (8.58) 式を書けば, それぞれ

$$Q(j, 1) = p_0 + \frac{p_1}{2} \{1 - e^{-(j-1)\Delta t/h}\} \quad (j=1, \dots, N+1) \quad (8.59)$$

$$Q(j, 1) = \begin{cases} p_0 + \frac{p_1(j-1)\Delta t}{2h} & (j=1, \dots, [h/\Delta t]) \\ p_0 + p_1/2 & (j=[h/\Delta t] + 1, \dots, N+1) \end{cases} \quad (8.60)$$

となる。

8.7.3 結 果

$M/M/2$ のとき, (8.59) 式を境界条件として, (8.54), (8.55) 式を用いて, $\lambda=0.2$, $h=1$ の条件で, 動作時間分布関数を数値解析した結果を図 8.5 に示す。2変数関数を完全に図示する良い方法が無いので, $\Phi(x, 0)$, $\Phi(x, x)$, $\Phi(N\Delta t, x)$ のみが描かれている。 $N\Delta t$ を無限大のように見て, (8.45) 式から

$$W(x) = 2\Phi(N\Delta t, x) - \Phi(x, x) \quad (x \geq 0) \quad (8.61)$$

を待ち時間分布関数として, 同じ図 8.5 中に示した。ただし, $N=100$, $\Delta t=0.05$ とした。計算時間は, 電子計算機 *FACOM 230-60* の *FORTRAN* で約 1 分であった。計算時間および必要メモリ量は, ほとんど N の大きさで定まる。種々の平均到着率 λ に対する既知の理論値と上述の方法による計算値を比較するために, 両方の待ち時間分布関数の値を合せて描いたものが図 8.6 (a), (b) である。各曲線は

$$\lambda = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.6$$

に対応し, いずれも $h=1$, $N=100$, $\Delta t=0.05$ である。

$M/D/2$ の場合も同様に (8.60) 式を境界条件とし, (8.54), (8.55) 式を用いて数値解析し, (8.61) 式により待ち時間分布関数を計算した結果を図 8.7 (a), (b) に示す。

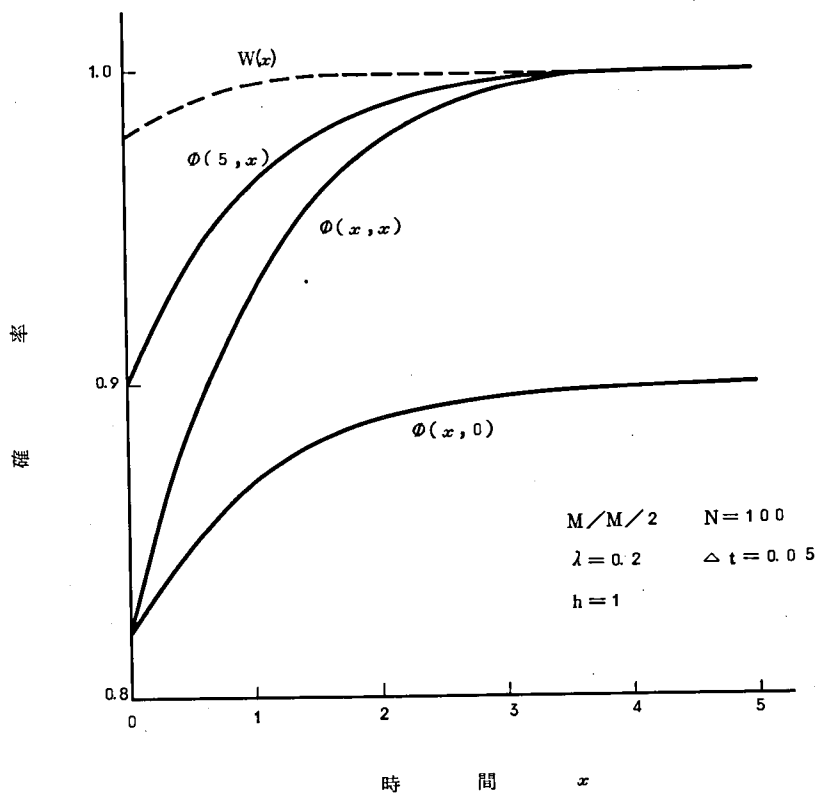


図 8.5 動作時間分布関数と待ち時間分布関数の例

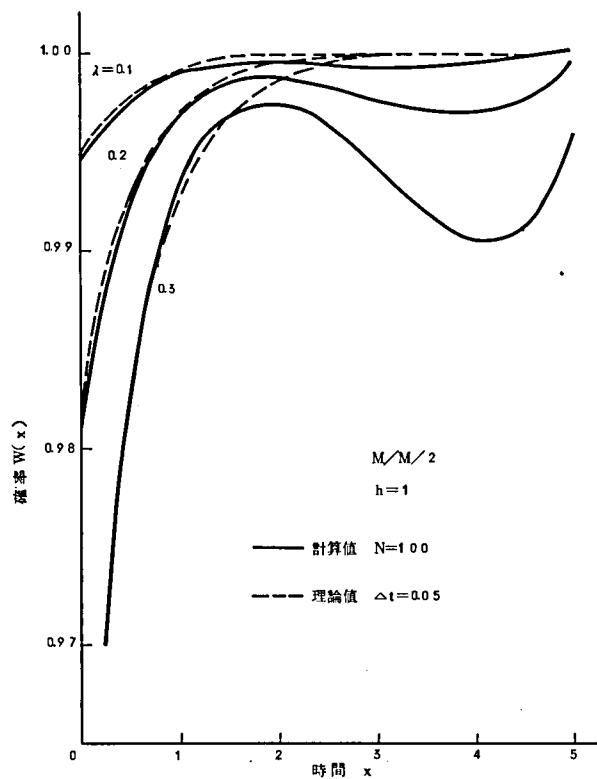


図 8.6 $M/M/2$ の待ち時間分布関数 (a)

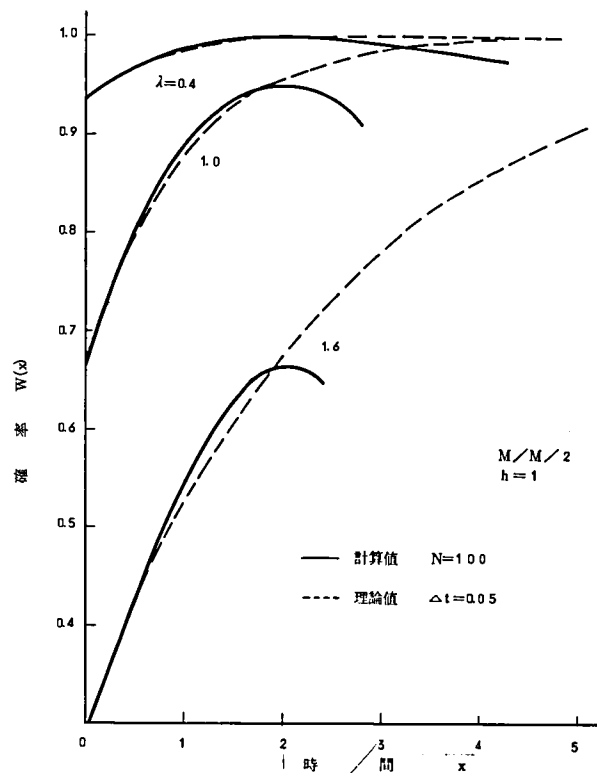


図 8.6 $M/M/2$ の待ち時間分布関数 (b)

$\Delta t = 0.02$ としている点異なるだけで、あとの条件は上の $M/M/2$ と全く同じである。 $M/D/2$ は $M/M/2$ の場合に比べ、 $\Phi(x_1, x_2)$ の値が急激に1に近づくので、 Δt を小さく取った。

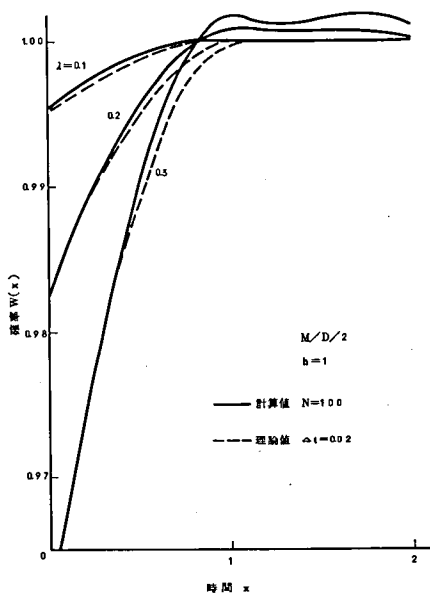


図 8.7 $M/D/2$ の待ち時間分布関数 (a)

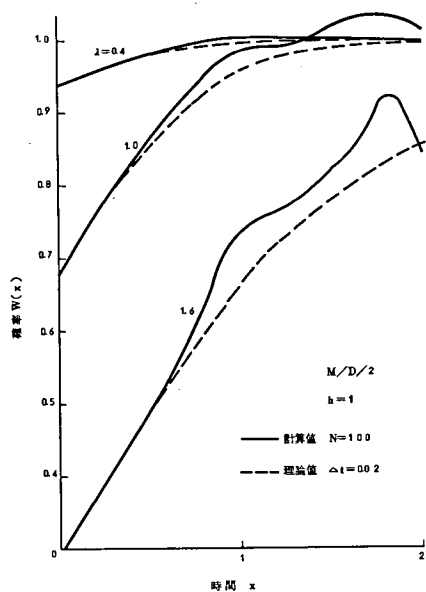


図 8.7 $M/D/2$ の待ち時間分布関数 (b)

図 8.6, 図 8.7 を見ると, 平均到着率が小さく $\lambda \leq 0.2$ くらいであれば, $M/M/2$ で $x < 2$, $M/D/2$ では $x < 1$ の範囲で, 待ち時間分布関数の値が, 計算値, 理論値でかなり一致する。 λ が大きいと, 差が大きくなる。また, $M/D/2$ では, $x=1$ および $x=2$ の近くで, とくに差があるのは, 分布関数の不連続性によるものと思われる。

ここで用いた数値解析は, 前述したように非常に荒い方法であるので, 誤差解析も十分に行なわなかったが, 待ち時間分布関数を計算するまでに含まれる誤差の種類は

(Ⅰ) 丸め誤差

(Ⅱ) 差分による近似式を用いたための誤差

(Ⅲ) 変数の取り得る範囲を有限で打切ったための誤差

である。(Ⅰ) は主として計算機の語長で定まる。(Ⅱ) は, 積分における誤差と (8.5.2) 式の形の近似式を用いたため Δt^2 のオーダーの誤差が含まれる。さらに, この誤差を含んだ値を, つぎの段階で用いるための誤差も (Ⅱ) に入る。(Ⅲ) はとくに, (8.6.1) 式を用いるときに問題となる。すなわち, $N\Delta t$ が十分大きくなくてはならない。(Ⅱ) の誤差を減らすためには, Δt を小さくする必要があり, 誤差 (Ⅱ), (Ⅲ) は概して相反する要素となる。

第9章 多段帰還方式の系内呼数の解析

この章では、多段帰還方式に対する系内呼数を解析する。ただし実用的見地から、さし当りあまり重要でないと思われる過渡解析は省略し、平衡状態を解析する。なお、水準数が2の場合については、本論文とは全く異なる補助変数法による解析がなされている（[Fu3]，[Fu4]）。

多段帰還方式のうち、もっとも基本的なモデルを取り上げれば、さらに一般的なモデルを解析する手法やその結果に対する見通しが得られるだろうという観点から、単一呼種（到着する呼の種類がただ1つで、初段に到着）の場合について、一般に多段の待ち行列モデルに基づき各水準の系内呼数分布を解析する。したがって、文献[FG1]，[FG2]の $FB_1, N, \bar{P} [H_1(x), q_i, m=0]$ と同一のモデルを扱う。すなわち、Kendallの記号で言えば、 $M/G/1$ 待ち行列モデルによる単一呼種の多段帰還方式で、非割込みの場合の各水準における系内呼数分布を解析する。解析方法は隠れマルコフ連鎖の方法を用い、セミマルコフ過程の理論を用いて任意時点の分布を求める。系内呼数のモーメントを求める方法を考え、数値計算例を図示する。

平均系内呼数を計算する簡便な別法も与える。そのときには、本章の他の部分と異なり一般に多呼種のモデルを扱う。

9.1 多段帰還待ち行列モデル

本章で取扱う待ち行列モデルを説明する。ただし9.5で扱うモデルはここで述べるものと異なるので、そこで改めて説明する。

図9.1に示す待ち行列モデルを、9.2～9.4では考える。いわゆる $M/G/1$ モデルで、単一処理装置に対して、水準によって優先順位の異なる多段の待ち行列が生ずるものとする。この待ち行列系に対する呼の到着はポアソン分布であり、初めに最も優先順位の高い水準に到着する。各水準における処理は先着順に、量子処理（quantum processing）されるものとする。すなわち、一定時間以内の処理（これを量子quantumと呼び、その時間長を量子長quantum sizeと呼ぶ）がなされ、要求する処理時間が終了すれば、直ちに系から退去し、量子終了時に処理時間が未了であればつぎの水準の最後尾に並んで待つ。ある水準における処理は、この水準より高い優先順位の水準がすべて空のときでなければ開始されない。また各水準における量子処理は、量子が終了するか、呼の保留時間が完了して系を退去するとき以外に中断されることはない。すなわち非割込み（nonpreemptive）と仮定する。なお、最劣位の水準における量子長は無限大とする。

つぎに、第9章の以下の部分で使用する諸量の記号と定義を説明する。

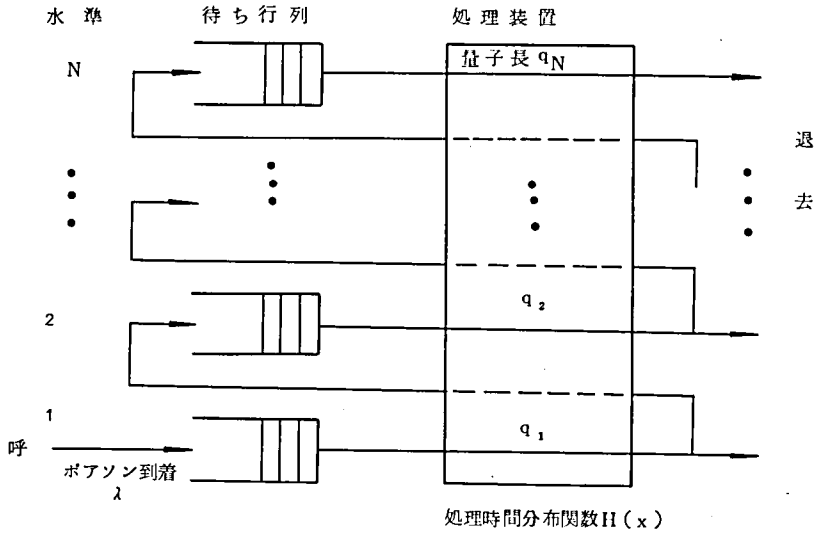


図 9.1 多段階還待ち行列モデル

N : 水準数。水準 1 から N までから成り、 $1 \rightarrow N$ の順に優先順位が下がる。 $N \geq 2$ と仮定する。

q_i : 水準 i における量子長。 $q_N = \infty$ とする。

また

$$Q_0 = 0, Q_i = \sum_{j=1}^i q_j \quad (i=1, \dots, N)$$

と置く。

λ : 呼はポアソン到着とし、その平均到着率。

$H(x)$: 呼の要求する処理時間分布関数。一般に任意の分布関数でよい。すなわち

$$H(x) = \text{Prob} \{ \text{処理時間} < x \}$$

である。処理時間は各呼について独立で、同一の分布関数とし、系の状態にも依存しないとする。

$H_i(x)$: 水準 i における処理時間の分布関数。すなわち、量子処理を考慮すれば

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{H(x + Q_{i-1}) - H(Q_{i-1})}{1 - H(Q_{i-1})} & (0 \leq x \leq q_i) \\ 1 & (x > q_i) \end{cases} \quad (i=1, \dots, N)$$

である。 $H(Q_{N-1}) < 1$ と仮定する。もし $H(Q_{N-1}) = 1$ なら、 N 水準設けることがほとんど無意味となるからである。上記の分布関数において、 $x = q_i$ で不連続になるのは、量子処理による効果である。

γ_i : 水準 i に達した呼が水準 i の量子処理を受けた後、まだ処理が終了しないで、水準 $i+1$ に移行する確率。すなわち

$$\gamma_i = 1 - H_i(q_i) = \frac{1 - H(Q_i)}{1 - H(Q_{i-1})} \quad (i=1, \dots, N-1)$$

である。

$H_{i1}(x), H_{i2}(x)$: 分布関数 $H_i(x)$ を便宜上和の形に分解した成分であり、 $H_{i1}(x)$ は水準 i から系を退去する場合に対応し、 $H_{i2}(x)$ は水準 $i+1$ 以上に移行する場合に対応する。これらは一般に分布関数ではない。

$$\left. \begin{aligned} H_{i1}(x) &= \begin{cases} H_i(x) & (0 \leq x \leq q_i) \\ 1 - \gamma_i & (x > q_i) \end{cases} \\ H_{i2}(x) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq q_i) \\ \gamma_i & (x > q_i) \end{cases} \\ H_i(x) &= H_{i1}(x) + H_{i2}(x) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, N-1)$$

である。

$\varphi_i(s; z)$: $H_{i1}(x), H_{i2}(x)$ と関連するラプラス・スチルチェス変換。すなわち

$$\varphi_i(s; z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-sx} d\{H_{i1}(x) + zH_{i2}(x)\} & (i=1, \dots, N-1) \\ \int_0^\infty e^{-sx} dH_N(x) & (i=N) \end{cases}$$

である。これは、水準 i における処理時間の分布関数について、水準 $i+1$ 以上に移行する分には変数 z を付加して区別したラプラス・スチルチェス変換といふことができる。もちろん $\varphi_i(s; 1)$ は $H_i(x)$ のラプラス・スチルチェス変換を表わすことになる。

$H_{i1}'(x), H_{i2}'(x)$: 水準 $1 \sim i-1$ における処理時間と、水準 i 以上における処理時間とについて、 $H_i(x)$ の場合と同様に、分布関数を和の形に分解した成分。すなわち

$$\left. \begin{aligned} H_{i1}'(x) &= \begin{cases} H(x) & (0 \leq x \leq Q_{i-1}) \\ H(Q_{i-1}) & (x > Q_{i-1}) \end{cases} \\ H_{i2}'(x) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq Q_{i-1}) \\ 1 - H(Q_{i-1}) & (x > Q_{i-1}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, N)$$

で与えられる。

$h_i^{(m)}$: 水準 i における処理時間の m 次のモーメント。すなわち

$$h_i^{(m)} = \int_0^{\infty} x^m dH_i(x) \quad (i=1, \dots, N)$$

ただし, $h_i = h_i^{(1)}$ とおく。これらの値は有限と仮定する。

$\alpha_i^{(m)}$: 上記のモーメント $h_i^{(m)}$ と関連して, 次のように置く。

$$\alpha_i^{(m)} = \sum_{j=1}^i h_j^{(m)} \prod_{k=1}^{j-1} \gamma_k$$

ただし, $\prod_{k=1}^0$ に対する値は 1 とする。また, $\alpha_i = \alpha_i^{(1)}$ と置き, とくに

$$h = \alpha_N$$

と書き表わす。これは平均処理時間である。

s_i : 水準 i における系内呼数 (処理中および待ち合わせ中の呼数)。 $s = (s_1, \dots, s_N)$, $s' = (s'_1, \dots, s'_N)$ 等を, 待ち行列系の状態と呼ぶことにする。

2.2 状態確率とその確率母関数

本節では, 量子終了直後および呼が系から退去した直後の時点における系の状態のみを考え, 状態確率を母関数の形で求める方法について述べる。今後, 単に量子終了直後というときには, 呼が系から退去する直後も含むこととする。

2.2.1 量子終了直後の状態の推移確率

全水準の量子終了直後時点すべてにおける, 系の状態推移系列を考え, その推移確率を求める。相続く 2 時点間の状態推移

$$s \rightarrow s'$$

を考えると, 0 でない確率で推移し得るのはつぎの場合に限られる。

(1) $s_1 \geq 1$ のとき, 水準 1 の処理が実行されて,

(1-1) 処理を受けたその呼が系から退去する場合

$$s'_2 = s_2, \dots, s'_N = s_N$$

(1-2) 処理を受けたその呼が水準 2 に行く場合

$$s'_2 = s_2 + 1, s'_3 = s_3, \dots, s'_N = s_N$$

(2) $s_1 = \dots = s_{i-1} = 0, s_i \geq 1$ ($2 \leq i \leq N-1$) のとき、水準 i の処理が実行されて、

(2-1) 処理を受けたその呼が系から退去する場合

$$s_2' = \dots = s_{i-1}' = 0, s_i' = s_i - 1, s_{i+1}' = s_{i+1}, \dots, s_N' = s_N$$

(2-2) 処理を受けたその呼が水準 $i+1$ に移行する場合

$$s_2' = \dots = s_{i-1}' = 0, s_i' = s_i - 1, s_{i+1}' = s_{i+1} + 1, s_{i+2}' = s_{i+2}, \\ \dots, s_N' = s_N$$

(3) $s_1 = \dots = s_{N-1} = 0, s_N \geq 1$ のとき、水準 N の処理が実行されて、処理を受けたその呼は必ず系から退去するので

$$s_2' = \dots = s_{N-1}' = 0, s_N' = s_N - 1$$

(4) $s_1 = \dots = s_N = 0$ すなわち系が空のとき

$$s_2' = 0 \text{ または } 1, s_3' = \dots = s_N' = 0$$

これは系が空状態になったとき以後に、初めて到着した呼が水準 1 で処理され、その処理された呼の処理時間がそこで終了したかどうかに従って、 $s_2' = 0$ または 1 となることを示す。

以上の説明において、 s_1 と s_1' との関係が述べられていない。これは相続く時点間中に到着する呼数 Δs に関係する。

上記の状態推移の確率を計算すると、(1-1), (1-2), (2-1), (2-2), (3),

(4) に対応して、それぞれ

$$\text{Prob}\{(s_1, \dots, s_N) \xrightarrow{1} (s_1 - 1 + \Delta s, s_2, \dots, s_N)\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_{11}(x) \\ (s_1 \geq 1)$$

$$\text{Prob}\{(s_1, \dots, s_N) \xrightarrow{1} (s_1 - 1 + \Delta s, s_2 + 1, s_3, \dots, s_N)\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_{12}(x) \\ (s_1 \geq 1)$$

$$\text{Prob}\{(0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N) \xrightarrow{2} (\Delta s, 0, \dots, 0, s_i - 1, s_{i+1}, \dots, s_N)\} \\ = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_{i1}(x) (s_i \geq 1) (2 \leq i \leq N-1)$$

$$\text{Prob}\{(0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N) \xrightarrow{2} (\Delta s, 0, \dots, 0, s_i - 1, s_{i+1} + 1, s_{i+2}, \dots, s_N)\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} \\ \cdot e^{-\lambda x} dH_{i2}(x) (s_i \geq 1) (2 \leq i \leq N-1)$$

(9.1)

$$\text{Prob} \{ (0, \dots, 0, s_N) \xrightarrow{N} (\Delta s, 0, \dots, 0, s_N - 1) \} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_N(x) \\ (s_N \geq 1)$$

$$\text{Prob} \{ (0, \dots, 0) \xrightarrow{N+1} (\Delta s, 0, \dots, 0) \} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_{11}(x)$$

$$\text{Prob} \{ (0, \dots, 0) \xrightarrow{N+1} (\Delta s, 1, 0, \dots, 0) \} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\Delta s}}{(\Delta s)!} e^{-\lambda x} dH_{12}(x)$$

を得る。状態推移を示す矢印の上に書かれた数字は、実行される処理の水準を示す。ただし、 $N+1$ だけは特別で、単に空状態からの推移を示すに過ぎない。

(9.1)式にあげた以外の状態推移確率は、すべて0である。このように、相続く量子終了直後の状態のみから、その状態推移確率が一意的に決定されるので、これらの状態系列はマルコフ連鎖となる。

つぎに、上記の推移確率に関する確率母関数を次式で定義する。今後は、ベクトル記号 $z = (z_1, \dots, z_N)$ も使用する。

$$F_i(z) = \sum_{s'_1=s_1-1}^\infty \dots \sum_{s'_N=s_N-1}^\infty z_1^{s'_1-s_1} \dots z_N^{s'_N-s_N} \text{Prob} \{ s \xrightarrow{i} s' \} \quad (i=1, \dots, N+1)$$

(9.1)式を用いて、この推移確率母関数を求めると、 $s = (0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N) (s_i \geq 1)$ のとき

$$F_i(z) = \frac{\varphi_i \{ \lambda(1-z_1); z_{i+1} \}}{z_i} \quad (i=1, \dots, N) \quad \left. \vphantom{\frac{\varphi_i \{ \lambda(1-z_1); z_{i+1} \}}{z_i}} \right\} \quad (9.2)$$

$s = (0, \dots, 0)$ のとき

$$F_{N+1}(z) = \varphi_1 \{ \lambda(1-z_1); z_2 \}$$

を得る。上式中の $\varphi_i(s; z)$ は、9.1で定義した関数である。なお、 $i=N$ のとき右辺に z_{N+1} が現われるかのように見えるが、 $\varphi_N(s; z)$ の定義により、決して現われることはない。

9.2.2 平衡状態確率の母関数についての関数方程式

量子終了直後における平衡状態確率 $\text{Prob} \{ s \}$ が存在すると仮定すれば

$$\text{Prob} \{ s' \} = \sum_s \text{Prob} \{ s \} \text{Prob} \{ s \xrightarrow{i} s' \}$$

がすべての s' について成立する。ただし、 i は状態 s による。すなわち、ベクトル s の要素を

添字の小さい方から見て行き、初めて $s_i \neq 0$ となる i か、 $s = (0, \dots, 0)$ のときには $N+1$ である。この式が状態方程式と呼ばれる。

さらに平衡状態の確率母関数を

$$G(Z) = \sum_{\mathbf{s}} z_1^{s_1} \dots z_N^{s_N} \text{Prob}\{\mathbf{s}\}$$

と定義し、見易いように

$$\begin{aligned} G_i(Z) &= G(0, \dots, 0, z_i, \dots, z_N) & (i=1, \dots, N) \\ G_{N+1}(Z) &= G(0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (9.3)$$

と置けば、(9.1), (9.2)式を用いて、上の状態方程式より

$$G(Z) = \sum_{i=1}^N \{G_i(Z) - G_{i+1}(Z)\} F_i(Z) + G_{N+1}(Z) F_{N+1}(Z)$$

となる。この式を導く過程において、 $G_i(Z) - G_{i+1}(Z)$ が水準 $1 \sim i-1$ に呼が存在しないで、水準 i の系内呼数が1以上である確率に関する確率母関数であることを利用した。ここで、 $F_0(Z) \equiv 1$ と置き、

$$G_1(Z) \equiv G(Z)$$

である事実に注意すれば、次式のように書き表わすことができる。

$$\sum_{i=1}^{N+1} \{F_{i-1}(Z) - F_i(Z)\} G_i(Z) = 0 \quad (9.4)$$

あるいは、 $G(Z)$ について解いた形にすれば

$$G(Z) = \frac{\sum_{i=1}^N \{F_i(Z) - F_{i+1}(Z)\} G_{i+1}(Z)}{F_1(Z) - 1} \quad (9.5)$$

を得る。(9.4), (9.5)式が、求めたかった量子終了直後の時点における平衡状態の確率母関数を与える式である。しかし、 $G_2(Z), \dots, G_N(Z)$ が含まれており、一般に $G(Z)$ に関する関数方程式となっている。

9.2.3 関数方程式の解について

関数方程式(9.4)式の解 $G(Z)$ が求める平衡状態確率の母関数である。そこで、この方程式の解法について述べる。(9.4)式が、関数方程式としては単純な形をしており、その特殊性を利用して、具体的に $G(Z)$ を求める一方法を与える。また、こうすることにより、解の存在および一意性も同時に示す。なお、(9.4)式は未知関数 $G(Z)$ に関して線形の関数方程式である。

(9.4)式は、 $G(Z)$ と(9.3)式の形で関係する未知関数 $G_2(Z), \dots, G_{N+1}(Z)$ を含むので、これらの関数を(9.4)式から消去できればよい。直ちに消去できそうもないので、つぎの方針を取る。その過程で、(9.4)式が、変数 z_1, \dots, z_N に関する恒等式であることを十分に利用する。

まず、 $G_{N+1}(Z) = G(0, \dots, 0)$

であるから、これは Z に無関係な一定値になる。この値は後に求めることにして、一応既知の値として議論を進める。 z_1, \dots, z_{N-1} の間に特別な関係を持たせて、 $G_1(Z), \dots, G_{N-1}(Z)$ を消去して、 $G_N(Z)$ のみを残す。その結果、 $G_N(Z)$ が決定される。つぎには、 z_1, \dots, z_{N-2} の間に特別な関係を持たせて、 $G_{N-1}(Z), G_N(Z)$ のみから成る関係式を得る。 $G_N(Z)$ はすでに求められているはずであるから、 $G_{N-1}(Z)$ が決定できる。以下同様にして、 $G_{N-2}(Z), \dots, G_2(Z)$ が順次決定でき、これらの結果を(9.5)式に代入すれば、 $G(Z)$ が得られる。

上記の方針を取るが、ここで変数 z_1, \dots, z_N の取り得る値の領域について一言触れておく。母関数の定義から、 $G_1(Z), \dots, G_N(Z)$ は領域 $|z_i| \leq 1$ ($i = 1, \dots, N$)において一様収束し、有界であることは明らかである。したがって、これらの関数はこの領域で意味を持つが、今後議論を進めるに当たっては、さらに領域を狭めて $0 \leq z_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, N$)に限ることにする。

さて本筋に戻って、具体的に方法を示す。一般に $2 \leq j \leq N$ の範囲の任意の j を取って、 $G_1(Z), \dots, G_{j-1}(Z)$ を消去して、 $G_j(Z), \dots, G_{N+1}(Z)$ のみから成る式にできることを示す。方程式系

$$F_l(Z) - 1 = 0 \quad (l = 1, \dots, j-1) \quad (9.6)$$

を満足する z_1, \dots, z_{j-1} を(9.4)式に代入すればよい。形式的には、つぎのようにする。(9.6)式において、 z_2, \dots, z_j のおおのをおの z_1 の関数として解いたものを

$$z_l = E_l(z_1) \quad (l = 2, \dots, j) \quad (9.7)$$

と置く。(9.7)式のように解き出せることは、(9.6)式がそれぞれ、 z_2, \dots, z_j に関する連立1次方程式になることから明らかである。また $0 \leq z_1 \leq 1$ の条件を付加して、(9.7)式から、 z_1 を z_j について解いたものを

$$z_1 = D_j(z_j) \quad (9.8)$$

と置く。実際に(9.6)式から

$$E_l(z_1) = \frac{z_1 \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z_1)x} dH'_{l-1,1}(x)}{\int_0^\infty e^{-\lambda(1-z_1)x} dH'_{l-1,2}(x)} \quad (l=2, \dots, j) \quad (9.9)$$

$$D_j(z_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda x} d\{H'_{j-1,1}(x) + z_j H'_{j-1,2}(x)\}^{*i} \quad (9.10)$$

となる。ただし、(9.10)式の右辺において、肩につけた記号 $*i$ は i 重の畳み込みを表わす。

(9.9)式は、方程式系(9.6)の初めから $l-1$ 個の部分方程式系を用いて

$$z_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z_1)x} d\{H'_{l-1,1}(x) + z_l H'_{l-1,2}(x)\} \quad (l=2, \dots, j) \quad (9.11)$$

が得られることにより導かれる。また(9.11)式において、 $l=j$ のとき、 $0 \leq z_j \leq 1$ であるから

$$H'_{l-1,1}(x) + z_l H'_{l-1,2}(x)$$

をあたかも分布関数であるかのように考える。

$$0 \leq H'_{l-1,1}(x) + z_l H'_{l-1,2}(x) \leq 1$$

であり、M/G/1モデルの全稼働時間(busy period)の分布を求めるときと同じ方法によって(9.10)式が得られる([Ta2])。

(9.4)式に、まず(9.7)式を代入し、その後で(9.8)式を代入すれば

$$\begin{aligned} & \{1 - F_j^{(j)}(z)\} G_j(z) + \sum_{i=j}^{N-1} \{F_i^{(j)}(z) - F_{i+1}^{(j)}(z)\} G_{i+1}(z) \\ & + \{F_N^{(j)}(z) - D_j(z_j)\} G_{N+1}(z) = 0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

が得られる。

$$F_i^{(j)}(z) = \begin{cases} F_j(z) & (i=j) \\ [F_i(z)]_{z_1=D_j(z_j)} & (i=j+1, \dots, N) \end{cases} \quad (9.13)$$

とする。(9.12)式の導出に当たっては、 $F_{j+1}(z), \dots, F_N(z)$ が z_2, \dots, z_j によらないこと、 $G_{j+1}(z), \dots, G_N(z)$ が z_1, \dots, z_j によらないことを利用している。また(9.7)、(9.8)式の定義から

$$z_j = E_j(D_j(z_j))$$

という自明の関係も用いた。

(2.1.2) 式は、 $G_j(z), \dots, G_{N+1}(z)$ のみから成る式であり、これが一まず求めたかった関係式である。あとは、 $j = N, N-1, \dots, 3, 2$ の場合に、順次、(2.1.2) 式に相当する関係式から $G_N(z), \dots, G_2(z)$ を順に求めてゆき、最後にこれらを (2.5) 式に代入すればよい。その結果を書き下ろすことも可能だが、複雑な級数を用いた形になり、後に用いることもないので、以上のように手順を示すだけに止める。

つぎに、一応既知として残してきた $G_{N+1}(z)$ の値を決定する。ついでに、後に用いるので、 $G_i(1, \dots, 1)$ ($i=1, \dots, N$) の値も求める。これは定義式 (2.3) から明らかなように、水準 $1 \sim i-1$ が空である確率を表わす。表記を簡単にするため

$$g_i = G_i(1, \dots, 1) \quad (i=1, \dots, N+1)$$

$$g'_i = g_i - g_{i+1} \quad (i=1, \dots, N)$$

を用いる。もちろん $g_1 = 1$, $g_{N+1} = G_{N+1}(z)$ である。

母関数を支配する関数方程式 (2.4) の両辺を、 z_1, \dots, z_N のおのおの 1 回微分し、 $z = (1, \dots, 1)$ と置いて得られる式と、 $g_1=1$ から自明の式

$$\sum_{i=1}^N g'_i + g_{N+1} = 1$$

とから、 g'_i ($i=1, \dots, N$), g_{N+1} に関する連立方程式は、行列を用いた式で書けば

$$\begin{bmatrix} \lambda_{h_1-1} & \lambda_{h_2} & \dots & \lambda_{h_N} & \lambda_{h_1} \\ r_1 & -1 & & & r_1 \\ & \cdot & \cdot & (0) & \\ & (0) & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & r_{N-1} & -1 \\ 1 & \cdot & \dots & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_N \\ g_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり、その解は

$$g'_i = \begin{cases} \lambda_h / r_0 & (i=1) \\ \prod_{j=1}^{i-1} r_j / r_0 & (i=2, \dots, N) \end{cases} \quad (2.14)$$

$$g_{N+1} = (1 - \lambda_h) / r_0 (= G_{N+1}(z)) \quad (2.15)$$

$$\text{ただし } r_0 = \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^{j-1} r_i$$

である。解を求める際に

$$h = \sum_{j=1}^N h_j \prod_{i=1}^{j-1} r_i \quad (9.16)$$

の成立することも利用している。 h は呼の平均処理時間である。(9.14)式から

$$g_i = G_i(1, \dots, 1) = \left\{ \sum_{k=i}^N \prod_{j=1}^{k-1} r_j + 1 - \lambda h \right\} / r_0 \quad (i=2, \dots, N) \quad (9.17)$$

である。

求めたかった $G_{N+1}(Z)$ の値は、(9.15)式で与えられる。 $G_{N+1}(Z) = G(0, \dots, 0) = \text{Prob} \{ (0, \dots, 0) \}$ であるから、この値 $(1 - \lambda h) / r_0$ は、量子終了直後時点のみを考えたとき、系が空になる確率である。 $M/G/1$ モデルで、量子処理でない、普通の処理方式(バッチ処理)のとき、系が空になる確率は $1 - \lambda h$ である。これと比較すると、量子処理のため、考える時点の数が r_0 倍になったため、空状態の確率が $1/r_0$ 倍になったものと解釈できる。

平衡状態の存在する条件について述べる。(9.4)式を導くとき、平衡状態の存在を仮定した後で、関数方程式の解の存在および一意性を示した。この場合に平衡状態の存在する必要十分条件は、(9.4)式の解として得られる $\text{Prob}\{s\}$ について

$$\text{Prob}\{s\} \geq 0$$

$$\sum_s \text{Prob}\{s\} = 1$$

を満足することである。本節で述べた解の求め方からも明らかなように、一般に $\text{Prob}\{s\}$ は $\text{Prob}\{(0, \dots, 0)\}$ に比例した形で得られるから、平衡状態の存在する条件は

$$\text{Prob}\{(0, \dots, 0)\} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \lambda h < 1 \quad (9.18)$$

で与えられる。

9.3 任意時点における系内呼数の分布

前節では、量子終了直後の時点における系の状態のみを考えてきた。本節では、任意時点における各水準の系内呼数の同時分布を母関数の形で求める。

量子終了直後の状態系列はマルコフ連鎖となる。これを基礎とするセミマルコフ過程([Fa])を考える。すなわち、つぎの量子終了時点までの状態が、直前の量子終了直後の状態に固定され

た確率過程を考える。基礎となるマルコフ連鎖は、待ち行列理論で隠れマルコフ連鎖

(an imbedded Markov chain)と呼ばれているように、特殊な離散的な時点における状態のみを問題とするのに対し、上記のように導入されたセミマルコフ過程は、もとの確率過程とは異なるが、連続的な時間を考慮に入れている。もとの確率過程と異なるのは、呼の到着により系の状態は時々刻々変化しているのに、セミマルコフ過程では、前の時点の状態に固定されている点である。

上記のセミマルコフ過程の任意時点における状態 s の確率を $\hat{p}\{s\}$ と書き表わせば、

$$\begin{aligned}\hat{p}\{(0, \dots, 0)\} &= c \left(\frac{1}{\lambda} + h_1 \right) \text{Prob}\{(0, \dots, 0)\} \\ \hat{p}\{(0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N)\} &= c h_i \text{Prob}\{(0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N)\} \\ &\quad (s_i \geq 1) (i=1, \dots, N)\end{aligned} \quad (219)$$

である。ここに、 c は定数であって、規格化条件

$$\sum_s \hat{p}\{s\} = 1$$

から、

$$c = \lambda r_0 \quad (220)$$

と決定される。 r_0 は (214), (215) 式で用いた値である。

このセミマルコフ過程で、最後の状態変化が生じて s になってから任意時点までの経過時間を t として

$$H_a(x; s) = \text{Prob}\{t < x, s\}$$

によって、経過時間 t の分布関数を表わす。

ただし $s = (0, \dots, 0)$ の場合には、考えている任意時点に系が空であるか、水準 1 の呼の処理中であるかに従い、添字 0, 1 をさらに付加して表わす。しかも、水準 1 の処理中のときの経過時間 t は、水準 1 の処理が開始されてからの時間とする。このとき、 $H_a(x; s)$ はつぎのようになる。

$$H_{a0}(x; (0, \dots, 0)) = \frac{\hat{p}\{(0, \dots, 0)\}}{1/\lambda + h_1} \int_0^x e^{-\lambda x} dx$$

$$H_{a1}(x; (0, \dots, 0)) = \frac{\hat{p}\{(0, \dots, 0)\}}{1/\lambda + h_1} \int_0^x \{1 - H_1(x)\} dx$$

$$\begin{aligned}H_a(x; (0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N)) &= \frac{\hat{p}\{(0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N)\}}{h_i} \int_0^x \{1 - H_i(x)\} dx \\ &\quad (s_i \geq 1) (i=1, \dots, N)\end{aligned}$$

さて、これまで考えてきたマルコフ連鎖、セミマルコフ過程から、本来の系の状態変化を表わす確率過程にたち戻り、任意時点において系の状態が s であり、水準 i の呼の処理中である確率を $\Pi_i \{s\}$ とすれば、

$$\Pi_1 \{s\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{\triangle s}}{(\triangle s)!} e^{-\lambda x} dH_a(x; (s_1 - \triangle s, s_2, \dots, s_N)) (s_1 > \triangle s \geq 0)$$

$$\Pi_i \{(s_1, 0, \dots, 0, s_i, \dots, s_N)\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{s_1}}{s_1!} e^{-\lambda x} dH_a(x; (0, \dots, s_i, \dots, s_N))$$

$$(s_i \geq 1) \quad (i = 2, \dots, N)$$

(9.22)

空状態を経る場合も同様に、添字 0 を付加して表わすと

$$\Pi_0 \{(0, \dots, 0)\} = \int_0^\infty dH_{a0}(x; (0, \dots, 0))$$

$$\Pi_0 \{(s_1, 0, \dots, 0)\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{s_1}}{s_1!} e^{-\lambda x} dH_{a1}(x; (0, \dots, 0))$$

(9.22)'

$$(s \geq 1)$$

を得る。以上の結果を用いて任意時点における状態確率の母関数 $\Gamma(z)$ は、量子終了直後における状態確率の母関数 $G(z)$ を用いて次式で与えられる。

$$\Gamma(z) = \sum_{i=0}^N \sum_S \Pi_i \{s\} z_1^{s_1} \dots z_N^{s_N}$$

$$= \lambda \gamma_0 \sum_{i=1}^N \{G_i(z) - G_{i+1}(z)\} \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z_1)x} \{1 - H_i(x)\} dx$$

$$+ \lambda \gamma_0 G_{N+1}(z) \{1/\lambda + z_1 \int_0^\infty e^{-\lambda(1-z_1)x} \{1 - H_1(x)\} dx\}$$

$$= \lambda \gamma_0 \left\{ \sum_{i=1}^N \{G_i(z) - G_{i+1}(z)\} \frac{1 - \varphi_i(\lambda(1-z_1); 1)}{\lambda(1-z_1)} \right.$$

$$\left. + G_{N+1}(z) \left\{ \frac{1}{\lambda} + z_1 \frac{1 - \varphi_1(\lambda(1-z_1); 1)}{\lambda(1-z_1)} \right\} \right\}$$

(9.23)

9.4 系内呼数のモーメント

9.4.1 任意時点における系内呼数のモーメント

前節で求めた $\Gamma(z)$ は、任意時点における各水準の系内呼数分布に関する情報をすべて持っ

ている。ここでは実用的見地から重要な統計量であるモーメントを求めてみる。 $\Gamma(z)$ を与える(2.23)式を見てわかるように、量子終了直後における状態確率の母関数 $G(z)$ を用いて表わされているので、 $G(z)$ を支配する関数方程式(2.4)を間接的に利用することになる。

任意時点における水準 i の系内呼数 s_i の m 次のモーメント $E[s_i^m]$ は、階乗モーメント (factorial moments)

$$\frac{\partial^j \Gamma}{\partial z_i^j} (1, \dots, 1) \quad (j=1, \dots, m)$$

の値をすべて知ることができれば、計算できる。(2.23)式の両辺を微分して、 $z=(1, \dots, 1)$ と置いた式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \Gamma}{\partial z_1^j} (1, \dots, 1) &= \lambda r_0 \left\{ \sum_{k=1}^j \binom{j}{k} \frac{\partial^k G_1}{\partial z_1^k} (1, \dots, 1) \frac{\lambda^{j-k} h_1^{(j-k+1)}}{j-k+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N (g_k - g_{k+1}) \frac{\lambda^j h_k^{(j+1)}}{j+1} + g_{N+1} \left(\lambda^{j-1} h_1^{(j)} + \frac{\lambda^j h_1^{(j+1)}}{j+1} \right) \right\} \\ \frac{\partial^j \Gamma}{\partial z_i^j} (1, \dots, 1) &= \lambda r_0 \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \frac{\partial^j G_k}{\partial z_i^j} (1, \dots, 1) - \frac{\partial^j G_{k+1}}{\partial z_i^j} (1, \dots, 1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h_k + \frac{\partial^j G_i}{\partial z_i^j} (1, \dots, 1) h_i \right\} \quad (i=2, \dots, N) \end{aligned}$$

$$(j=1, \dots, m) \quad (2.24)$$

を得る。これから明らかに、 $G(z)$ の $z=(1, \dots, 1)$ における微係数を知れば、求めたい任意時点における系内呼数のモーメントが直ちに得られることになる。ところが、量子終了直後の状態確率の母関数 $G(z)$ は、2.2.3で述べた方法により求められるので、微係数の値もそれから得られるはずである。しかし、 $G(z)$ を含む関数方程式の両辺を微分して得られる方程式を用いて、 $G(z)$ の $z=(1, \dots, 1)$ における各種の微係数を求めることも可能である。

とくに、1次モーメントである平均系内呼数は、1次の階乗モーメントと一致する。これを2.4.2で後者の方法により計算する。また標準偏差は、2次の階乗モーメントと平均から求めることができる。これを2.4.3で、やはり同様の方法で計算する。

さらに高次の一般に m 次のモーメントを求めるときには、 $G(z)$ の高階の微係数が必要になる。このときにも、(2.4)式の両辺を、 $1 \sim m+1$ 回微分して $z=(1, \dots, 1)$ を代入して得ら

れる式すべてから成る連立方程式から、必要な階数の微係数がすべて決定できる。ただし、微分する変数および各変数の微分階数はすべての組合せを取らなければならない。

9.4.2 平均系内呼数

(9.4)式の両辺を z_i, z_j について1回ずつ微分し、 $z = (1, \dots, 1)$ とする。このとき $i = 1, \dots, j; j = 1, \dots, N$ のすべての組合せについて微分する。ここで簡単のために、つぎの記号を用いる。

$$g_{ik}^{(1)} = \frac{\partial (G_i - G_{i+1})}{\partial z_k} (1, \dots, 1) \quad (i = 1, \dots, k; k = 1, \dots, N)$$

得られる連立方程式は

$$r_0 g_{11}^{(1)} = \lambda_k + \frac{\lambda^2 \alpha_N^{(2)}}{2(1 - \lambda \alpha_1)}$$

$$r_0 g_{12}^{(1)} = \frac{\lambda r_1 q_1}{1 - \lambda \alpha_2} + \frac{\lambda^2 r_1 \alpha_N^{(2)}}{2(1 - \lambda \alpha_1)(1 - \lambda \alpha_2)}$$

$$r_0 g_{22}^{(1)} = r_1 (r_0 g_{12}^{(1)} + 1)$$

$$r_0 g_{1j}^{(1)} - \lambda r_0 \sum_{i=1}^j h_i g_{ij}^{(1)} = \lambda (q_{j-1} - h_j) \prod_{i=1}^{j-1} r_i$$

$$r_{i-1} g_{i-1j}^{(1)} - g_{ij}^{(1)} = 0 \quad (i = 2, \dots, j-2)$$

$$r_0 (r_{j-2} g_{j-2j}^{(1)} - g_{j-1j}^{(1)}) = -r_{j-1} (r_0 g_{j-1j}^{(1)} - \prod_{i=1}^{j-2} r_i)$$

$$r_0 (r_{j-1} g_{j-1j}^{(1)} - g_{jj}^{(1)}) = -\prod_{i=1}^{j-1} r_i \quad (j = 3, \dots, N)$$

である。これを用いて、(9.2.4)式から、水準 i における平均系内呼数 L_i は

$$L_1 = \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} (1, \dots, 1) = \lambda_k + \frac{\lambda^2 \alpha_N^{(2)}}{2(1 - \lambda \alpha_1)}$$

$$L_j = \frac{\partial \Gamma}{\partial z_j} (1, \dots, 1) = \frac{r_{j-1} (\lambda h_{j-1} + r_{j-1}) \prod_{i=1}^{j-2} r_i^2}{(1 - \lambda \alpha_j)(1 - \lambda \alpha_{j-1})(1 - \lambda \alpha_{j-2})} \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \frac{\lambda^2 \alpha_N^{(2)}}{2} + \prod_{i=1}^{j-2} (1 - \lambda \alpha_i) \lambda q_i \right\} \\ & + \left(\frac{\lambda \alpha_j}{1 - \lambda \alpha_j} \lambda q_{j-1} + \lambda h_j \right) \prod_{i=1}^{j-1} r_i \quad (j=2, \dots, N) \end{aligned}$$

となる。ただし， $\alpha_0 = 0$ とする。

9.4.3 系内呼数の標準偏差

水準 i の系内呼数の標準偏差 σ_i は

$$\sigma_i^2 = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i^2} (1, \dots, 1) + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i} (1, \dots, 1) \left\{ 1 - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i} (1, \dots, 1) \right\}$$

から計算される。右辺の第1項の値を求めるために，9.4.1で述べたように，(9.4)式を微分して得られる連立方程式から， $G(z)$ に関する2階以下の微係数を計算する必要がある。平均の場合の(9.25)式のように，完全に最終結果を与えることが困難なので，連立方程式まで出しておき，あとは計算機により数値計算する。

簡単のため

$$g_{ijk}^{(2)} = \frac{\partial^2 (G_i - G_{i+1})}{\partial z_j \partial z_k} (1, \dots, 1) \quad (i=1, \dots, j; j=1, \dots, k; k=1, \dots, N)$$

と置けば，新しく加わる連立方程式はつぎの通りである。

$$r_0 (\lambda h_1 - 1) g_{11}^{(2)} + \{ \lambda^2 h_1^{(2)} - 2(\lambda h_1 - 1) \} (r_0 g_{11}^{(1)} - \lambda h) + \frac{\lambda^3}{3} \alpha_N^{(3)} = 0$$

$$r_0 r_1 g_{11}^{(2)} + 2 r_0 (\lambda h_1 - 1) g_{12}^{(2)} + 2 r_1 (1 - \lambda q_1) (\lambda h - r_0 g_{11}^{(1)})$$

$$+ r_0 \{ \lambda^2 h_1^{(2)} - 2(\lambda h_1 - 1) \} g_{12}^{(1)} + \lambda^2 \{ r_1 q_1^2 + (r_0 g_{22}^{(1)} - r_1) h_2^{(2)} \} = 0$$

$$2 r_0 (\lambda h_1 - 1) g_{1j}^{(2)} - 2 r_0 (\lambda h_1 - 1) g_{1j}^{(1)} + \lambda^2 \{ r_{j-1} (h_{j-1}^{(2)} + r_{j-1} h_j^{(2)})$$

$$\cdot (r_0 g_{j-1}^{(1)} - r_{j-1} \prod_{i=1}^{j-2} r_i) + r_0 \alpha_j^{(2)} g_{1j}^{(1)} + q_{j-1} \prod_{i=1}^{j-1} r_i \} = 0 \quad (j=3, \dots, N)$$

$$2r_0 r_1 g_{112}^{(2)} + r_0 (\lambda_{h_1} - 1) g_{122}^{(2)} + r_0 \lambda_{h_2} g_{222}^{(2)}$$

$$+ 2 \{ r_0 r_1 (\lambda_{q_1} - 1) g_{12}^{(1)} - \lambda_{h_2} (r_0 g_{22}^{(1)} - r_1) \} = 0$$

$$r_0 r_1 g_{113}^{(2)} + r_0 (\lambda_{h_1} - 1) g_{123}^{(2)} + r_0 \lambda_{h_2} g_{223}^{(2)} + r_0 r_1 \{ \lambda (q_1 - h_2) - 1 \} g_{13}^{(1)}$$

$$+ \lambda r_2 (q_2 - h_2) (r_0 g_{22}^{(1)} - r_1) = 0$$

$$r_1 g_{11j}^{(2)} + (\lambda_{h_1} - 1) g_{12j}^{(2)} + \lambda_{h_2} g_{22j}^{(2)} + r_1 \{ \lambda (q_1 - h_2) - 1 \} g_{1j}^{(1)} = 0 \quad (j=4, \dots, N)$$

$$r_0 g_{1jj}^{(2)} - r_0 \lambda \sum_{i=1}^j h_i g_{ijj}^{(2)} - 2 \lambda (q_{j-1} - h_j) (r_0 g_{jj}^{(1)} - \prod_{i=1}^{j-1} r_i) = 0 \quad (j=3, \dots, N)$$

$$r_0 g_{1jj+1}^{(2)} - r_0 \lambda \sum_{i=1}^j h_i g_{ijj+1}^{(2)} - \lambda \{ r_0 (q_{j-1} - h_j) g_{jj+1}^{(1)} - \prod_{i=1}^{j-1} r_i$$

$$+ r_j (q_j - h_j) (r_0 g_{jj}^{(1)} - \prod_{i=1}^{j-1} r_i) \} = 0 \quad (j=3, \dots, N-1)$$

$$g_{1jk}^{(2)} - \lambda \sum_{i=1}^j h_i g_{ijk}^{(2)} - \lambda (q_{j-1} - h_j) g_{1k}^{(1)} \prod_{i=1}^{j-1} r_i = 0 \quad (j=3, \dots, k-2; k=5, \dots, N)$$

$$r_0 r_{j-1} g_{j-1jj}^{(2)} - r_0 g_{jjj}^{(2)} + 2 (r_0 g_{jj}^{(1)} - \prod_{i=1}^{j-1} r_i) = 0 \quad (j=2, \dots, N)$$

$$2 r_{j-1} g_{j-1jj+1}^{(2)} + r_j g_{jjj+1}^{(2)} - 2 g_{jjj+1}^{(2)} + 2 g_{1j+1}^{(1)} \prod_{i=1}^{j-1} r_i = 0 \quad (j=2, \dots, N-1)$$

$$r_{j-1} g_{j-1jk}^{(2)} - g_{jjk}^{(2)} + g_{1k}^{(1)} \prod_{i=1}^{j-1} r_i = 0 \quad (j=2, \dots, k-2; k=4, \dots, N)$$

$$r_0 r_{j-1} g_{j-1j+1j+1}^{(2)} + r_0 r_j g_{jjj+1}^{(2)} + r_0 g_{jj+1j+1}^{(2)} - 2 (r_0 g_{j+1j+1}^{(1)} - \prod_{i=1}^j r_i) = 0$$

(j=2, \dots, N-1)

$$r_{j-1} g_{j-1j+1k}^{(2)} + r_j g_{jjk}^{(2)} - g_{jj+1k}^{(2)} - 2 g_{1k}^{(1)} \prod_{i=1}^j r_i = 0 \quad (j=2, \dots, k-2; k=4, \dots, N)$$

$$r_{j-1} g_{j-1, k, l}^{(2)} - g_{j, k, l}^{(2)} = 0 \quad (j=2, \dots, k-2; k=4, \dots, l; l=4, \dots, N)$$

この連立方程式の数値解 $g_{ijk}^{(2)}$ を、(9.2.4) 式の $j=2$ の場合に代入し、9.4.2 の結果も利用すれば、各水準の標準偏差が得られる。

なお、水準 1 の系内呼数の標準偏差 σ_1 に対してだけは、比較的容易に求められ

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & \lambda \left\{ h_1 + \frac{\lambda \alpha_N^{(2)}}{2(1-\lambda \alpha_1)} \right\} + \lambda^2 \left\{ \alpha_N^{(2)} - h_1^2 + \frac{\lambda}{3(1-\lambda \alpha_1)} \alpha_N^{(3)} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{4(1-\lambda \alpha_1)^2} (2 h_1^{(2)} - \alpha_N^{(2)}) \alpha_N^{(2)} \right\} \end{aligned}$$

となる。

全系内呼数の標準偏差を σ とし、水準 i と水準 j の系内呼数の共分散を σ_{ij} と書けば ($1 \leq i < j \leq N$)

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \sigma_{ij}$$

となる。共分散 σ_{ij} は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i \partial z_j} (1, \dots, 1) - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i} (1, \dots, 1) \frac{\partial \Gamma}{\partial z_j} (1, \dots, 1) \quad (i=1, \dots, N-1; j=i+1, \dots, N)$$

この式の右辺第 1 項は、つぎで与えられる。

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_1 \partial z_j} (1, \dots, 1) = \lambda r_0 \left(g_{11j}^{(2)} h_1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^j g_{kj}^{(1)} h_k^{(2)} \right) \quad (j=2, \dots, N)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i \partial z_j} (1, \dots, 1) = \lambda r_0 \sum_{k=1}^i g_{kij}^{(2)} h_k^{(2)} \quad (i=2, \dots, N-1; j=i+1, \dots, N)$$

9.5 平均系内呼数を求める別法

9.5.1 待ち行列モデルと条件つき平均待ち時間

本節で扱う待ち行列モデルを説明する。前節までのモデルでは、系に対する呼の到着する水準は水準 1 だけであつたが、本節のモデルは、 $1 \sim N$ のどの水準にも呼が到着する。このとき、各呼は外部優先順位をもつ。たとえば (p, u) なる外部優先順位を持つ呼は、水準 p に到着し、

この水準の中では u 番目の順位を持つ ($p = 1, \dots, N; u = 1, \dots, U$)。各水準における処理は量子処理であることは、これまでのモデルと同じである。量子長は水準ごとに一定とする。到着時の外部優先順位 (p, u) の呼が水準 n ($p \leq n \leq N$) で待っているときの優先権は、この水準で

$$p(p-1)U/2 + u$$

番目の優先権を持つ。同じ外部優先順位の、同じ水準で待っている呼の中では、先着順とする。処理時間分布は、外部優先順位ごとに同一の、独立な一般分布とする。外部優先順位 (p, u) の呼の到着は、平均到着率 $\lambda_{p,u}$ のポアソン到着とする。

このようなモデルに対する条件つき待ち時間の解析は、文献 [FG1], [FG2] で十分なされており、分布関数はもちろん、平均待ち時間も与えられている。外部優先順位 (p, u) の呼が、水準 n から系を退去する場合の平均待ち時間 (いま考えている呼自身の処理時間は含めない) $W_{p,u;n}$ は次式で与えられている。

$$\begin{aligned} W_{p,u;n} = & \left[\sum_{(i,v)=(1,1)}^{(p,u)} \lambda_{i,v} \beta_{i,v;n}^{(2)} + \sum_{(i,v)=(p,u+1)}^{(n-1,U)} \lambda_{i,v} \beta_{i,v;n-1}^{(2)} \right. \\ & \left. + \sum_{j=n+1}^N \sum_{(i,v)=(1,1)}^{(p,u)} \lambda_{i,v;j} h_{i,v;j}^{(2)} + \sum_{j=n}^N \sum_{(i,v)=(p,u+1)}^{(j,U)} \lambda_{i,v;j} h_{i,v;j}^{(2)} \right] \\ & / \left\{ 2(1-\rho_{p,u;n-1})(1-\rho_{p,u-1;n-1}) \right\} + \frac{\rho_{p,u-1;n-1}}{1-\rho_{p,u-1;n-1}} \sum_{i=p}^{n-1} q_i \end{aligned} \quad (9.26)$$

上式中で、

$\rho_{p,u;n-1}$: (p, u) の呼が水準 n に達したときより高い優先度の平均呼量

$\lambda_{i,v;j}$: (i, v) の呼のうち水準 j に達する呼の平均到着率

$\beta_{i,v;n}^{(2)}$: (i, v) の呼のうち水準 n から退去するものの処理時間の 2 次モーメント

$h_{i,v;j}^{(2)}$: (i, v) の呼の水準 j における処理時間の 2 次モーメント

を表わすものとする。文献 [FG1], [FG2] では、(9.26) 式で表わされる量を、外部優先順位 (p, u) の呼が水準 n から退去する場合の平均待ち時間としている。しかし、対象としているモデルは、優先権のある待ち行列であることから、明らかに (9.26) 式で与えられる $W_{p,u;n}$ は、(p, u) の呼のうち水準 n 以上に行く呼の、水準 n で処理を受けるまでの平均待ち時間である。

2.5.2 Littleの関係式とその応用

Littleは、非常に一般的な待ち行列系の平均特性について、簡単な関係の成立することを証明した([L])。すなわち

〔定理〕待ち行列系における系内呼数および到着順に並べた各呼の系内時間の系列および到着間隔の系列がすべて定常であり、それぞれ有限の平均値 L 、 W 、 $1/\lambda$ を持つとする。さらに到着間隔の系列がエルゴード的であれば次式が成立する。

$$L = \lambda W$$

上記の定理の前提条件は、呼の到着もかなり一般的なものでよく、処理の順序にもよらず、また処理装置が多数でもよいことになる。

いま考えている待ち行列系が平衡状態にあると仮定すれば、定理の条件は満足される。本論に入る前に、幾つかの記号を導入する。

$\lambda'_{p,u;n}$: 外部優先順位 (p, u) で到着し、ちょうど水準 n から退去する呼の平均到着率。

$q_{p;n}$: 水準 p から水準 n までの量子長の和。ただし、 $q_{p;p-1} = 0$ とする。

$T_{p,u;n}$: (p, u) の呼で、水準 n から退去するものの、水準 n における平均処理時間。

$L_{p,u;n}^{(k)}$: (p, u) の呼で、水準 n から退去する呼のうち、任意時点に水準 k に存在する平均呼数。

外部優先順位 (p, u) の呼で、水準 n から退去する呼に注目し、このうち水準 $p \sim k$ ($k \leq n$)に存在する呼を1つの系として考える。平均特性について、上述のLittleの定理を適用する。

(i) $k < n$ のとき

注目する呼が、水準 $p \sim k$ から成る部分系にやってくる平均到着率は $\lambda'_{p,u;n}$ であり、この部分系における平均系内時間は、水準 k までの平均待ち時間と、注目する呼の処理時間との和 $W_{p,u;k} + q_{p;k}$ で与えられる。したがって

$$\lambda'_{p,u;n}(W_{p,u;k} + q_{p;k}) = \sum_{i=p}^k L_{p,u;n}(i) \quad (9.27)$$

(ii) $k = n$ のとき

平均到着率は、(i)と同じく $\lambda'_{p,u;n}$ であり、平均系内時間は、水準 n までの平均待ち時間と水準 $n-1$ までの処理時間と水準 n における平均処理時間の和 $W_{p,u;n} + q_{p;n-1} + T_{p,u;n}$ で与えられるから

$$\lambda'_{p,u;n}(W_{p,u;n} + q_{p;n-1} + T_{p,u;n}) = \sum_{i=p}^n L_{p,u;n}(i) \quad (9.28)$$

なる関係式が成立する。

(9.27), (9.28)式から, $L_{p,u;n}(k)$ に対する式が直ちに得られる。 p, k, n の大小関係によって分けて書くと

$$\begin{aligned}
 (i) \quad L_{p,u;p}(p) &= \lambda_{p,u;p}^1 (W_{p,u;p} + T_{p,u;p}) \quad (1 \leq p \leq N) \\
 (ii) \quad L_{p,u;n}(p) &= \lambda_{p,u;n}^1 (W_{p,u;p} + q_p) \quad (1 \leq p < n \leq N) \\
 (iii) \quad L_{p,u;n}(k) &= \lambda_{p,u;n}^1 (W_{p,u;k} - W_{p,u;k-1} + q_k) \quad (1 \leq p < k < n \leq N) \\
 (iv) \quad L_{p,u;n}(n) &= \lambda_{p,u;n}^1 (W_{p,u;n} - W_{p,u;n-1} + T_{p,u;n}) \quad (1 \leq p < n \leq N)
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

となる。これらが, 求めたかった平均系内呼数をもつとも細かく分割した形である。なお

$$\lambda_{p,u;n}^1 = \lambda_{p,u;n} - \lambda_{p,u;n+1} \quad (1 \leq p \leq n \leq N) \tag{9.30}$$

である。ただし $\lambda_{p,u;N+1} = 0$ とおく。

(9.29)式を用いて, 各水準ごとの平均系内呼数とか, 各外部優先順位別の平均系内呼数とかを求めることができる ([Y3])。ここでは前節の単一呼種の場合の(9.25)式に対応する式をあげることにする。

$$U = 1, \quad \sum_{n=1}^N \lambda_{1,1;n} = \lambda, \quad \lambda_{p,1;n} = 0 \quad (p \neq 1)$$

の場合になり

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \lambda \{ W_1 + (1-r_1)T_1 + r_1 q_1 \} \\
 L_k &= \lambda \{ W_k - W_{k-1} + (1-r_k)T_k + r_k q_k \} \prod_{i=1}^{k-1} r_i \quad (k=2, \dots, N-1) \\
 L_N &= \lambda (W_N - W_{N-1} + T_N) \prod_{i=1}^{N-1} r_i
 \end{aligned} \tag{9.31}$$

が得られる。ただし, W_k は水準 k の処理を受けるまでの待ち時間, T_k は水準 k の処理時間が量子長より短い呼の, 水準 k における平均処理時間である。

9.6 数値計算例

これまでの解析は, 一般分布の処理時間を考えてきたので, 各水準において各呼の処理開始前

に準備時間が付加される場合にも、解析結果を利用できる。処理時間分布として、初めから各水準における準備時間を考慮した分布を想定すればよい。この章では簡単のため、各水準における準備時間は一定で、しかもすべて等しいとする。また準備時間を除く純粹の処理時間（これを本節では単に処理時間と呼ぶことにする）は平均 $1/\mu$ の指数分布としておく。 $\rho = \lambda/\mu$ を利用率と呼ぶことにする。

9.6.1 平均系内呼数

図 9.2 は単一呼種、水準数 5、量子長が 1、平均処理時間が 1 の場合の平均系内呼数を、利用率 ρ に対してプロットしたものである。ただし実線は準備時間が 0 の場合、破線は各水準の準備時間をすべて等しく 0.1 とした場合である。各水準の平均系内呼数および全系内呼数の平均を同

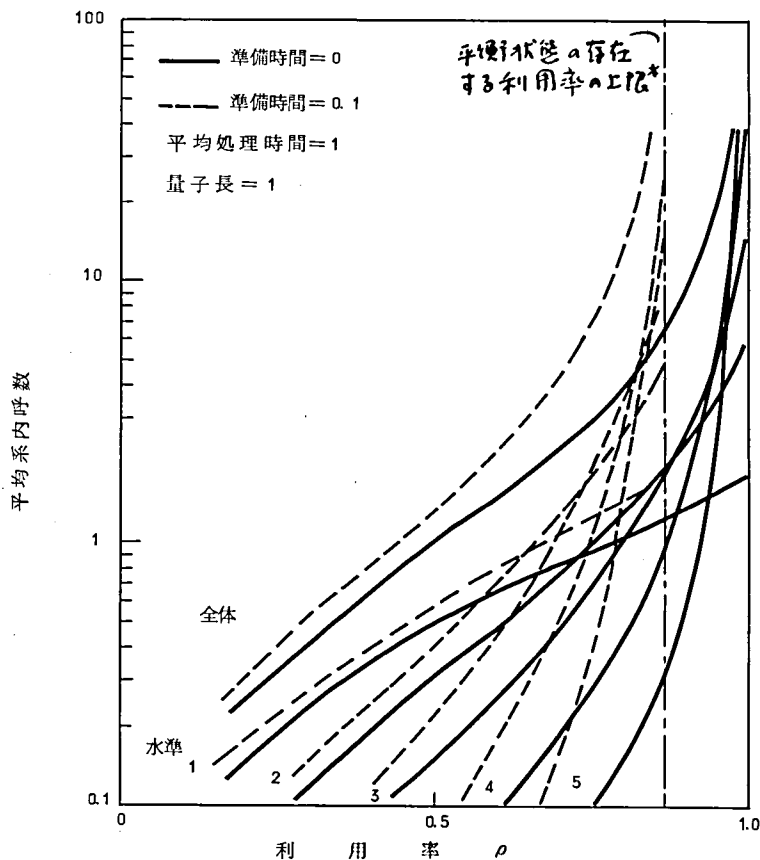


図 9.2 5 水準の場合の平均系内呼数

* 本章の以下4図でも同様である。-87-

時にプロットしてある。またこの図中一点鎖線は、準備時間が0.1の場合に、平衡状態の存在する利用率の上限を示している。なお準備時間が0のとき、この上限は $\rho = 1$ である。この図9.2において、最終段である水準5の平均系内呼数と全系内呼数の平均は、この上限の利用率で無限大に発散するが、他の水準の平均系内呼数は、この上限の利用率においても有限のままである。準備時間の有無2つの場合を比較すると、当然のことながら、準備時間のある方が平均系内呼数は大きい。

図9.3では、図9.2の場合とほぼ同じ条件のもとで、量子長が0.5と2の場合について平均系内呼数がプロットされている。破線が0.5、実線が2の場合である。ただし、準備時間はともに0である。全系内呼数の平均は両方とも一致するので、実線で代表させてある。量子長の長い方が、最終段に近い水準の平均系内呼数は小さくなり、初段に近い水準の平均系内呼数は大きくなる傾向にある。

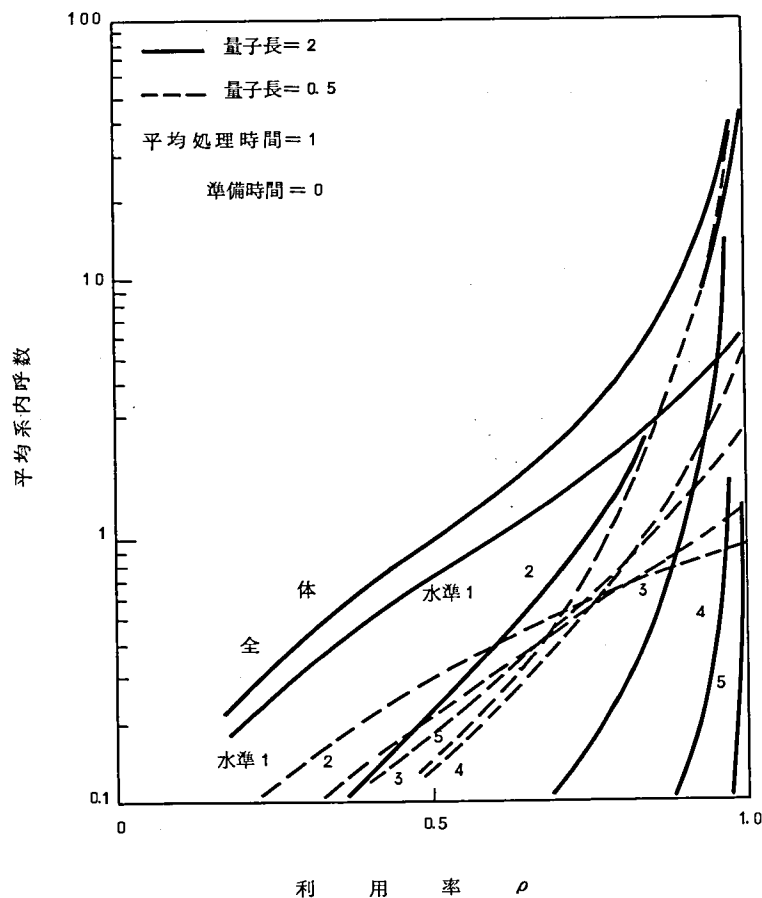


図9.3 異なる量子長に対する平均系内呼数

なお、図 9.2、図 9.3 いずれも、(9.25) 式から計算した値と、Little の関係式を利用して得られた (9.31) 式により計算した値と一致することを確認している。

図 9.4 は、水準数が 2、初段の量子長が 1 で、2 種の呼がそれぞれの水準にたがいに独立にポアソン到着し、平均処理時間は 2 呼種とも 1 で準備時間のない場合である。水準 2 に到着する呼の利用率は $\rho_2 = 0.1$ とし、横軸には、水準 1 に到着する呼の利用率 ρ_1 を取っている。一点鎖線は、図 9.2 と同様に平衡条件を満足する利用率 ρ_1 の上限を示す。

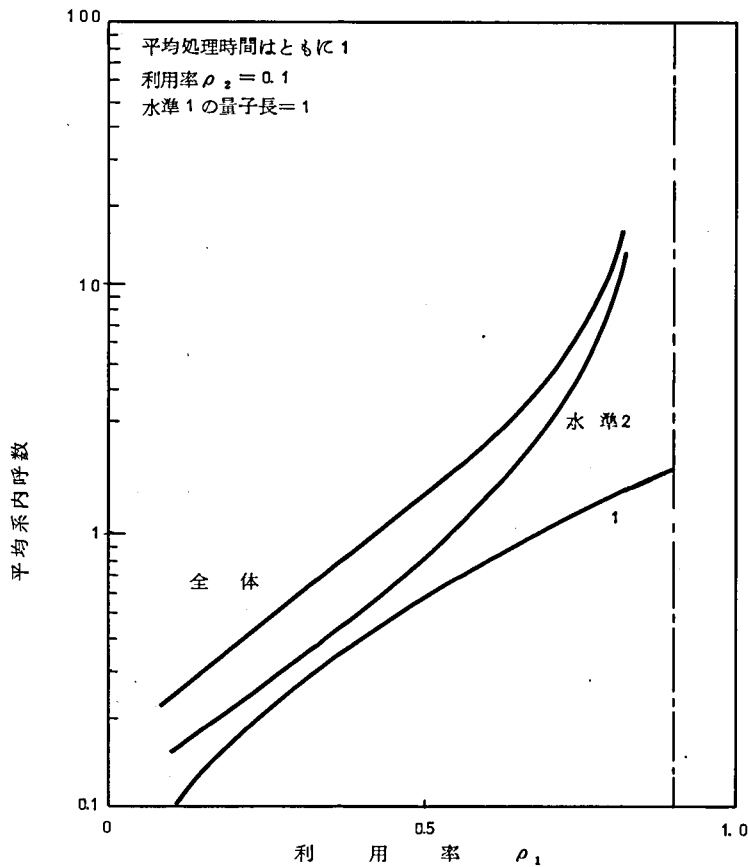


図 9.4 2 呼種、2 水準の場合の平均系内呼数

9.6.2 系内呼数の標準偏差

系内呼数の標準偏差も，9.4.3で述べた方法により数値計算した結果を，図9.5，図9.6に示す。これらは，それぞれ図9.2，図9.3と同じ条件の場合である。全般的に，平均系内呼数と似た傾向を示すことがわかる。

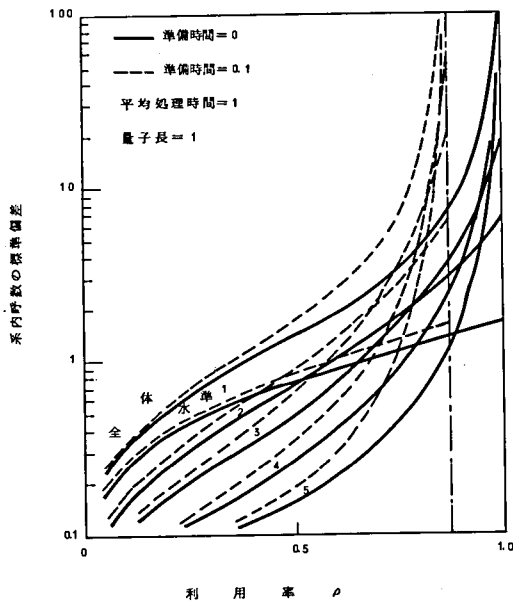


図9.5 5水準の場合の系内呼数の標準偏差

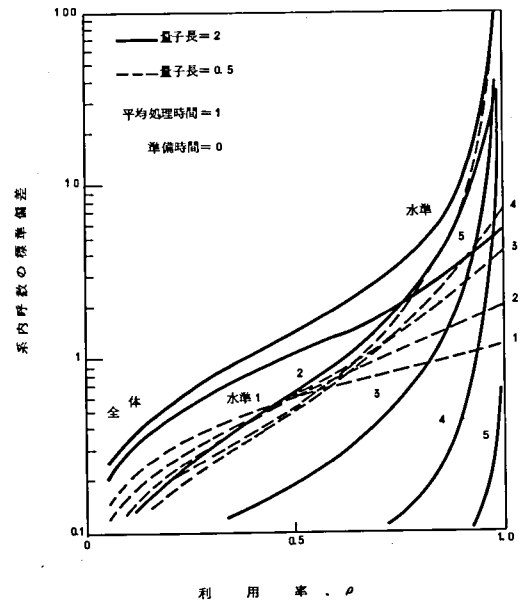


図9.6 異なる量子長に対する系内呼数の標準偏差

第10章 多重処理装置による会話形処理モデルの解析

データ通信と呼ばれる共同利用形式の情報処理システムが実用化されている。処理方式を大別すると、会話形と一括形の2種類がある。本章は会話形処理方式の一モデルに関する解析である。会話形処理方式の具体的な方式として、タイムシェアリングシステムが考えられ、7.1で述べたようにスケジューリング方式と関連させて各種の待ち合わせ論による解析がなされている。これらは会話形処理の言わば微視的な解析と言うことができる。これに対して、巨視的なモデルとして、1人の利用者、あるいは1つのジョブが何回か繰り返し処理され、しかも各処理終了後に時間遅れがあって初めて、つぎの処理を要求することを考慮して、帰還遅れ状態を伴う帰還形待ち行列モデルが提案され、単一処理装置 (single processor) の場合はすでに解析されている (N)。

ここでは、多重処理装置 (マルチプロセッサ) の場合にも同様に解析できることを示し、平均特性などを求める。まず、取り扱う待ち行列モデルの説明をした後、状態方程式を求め、平衡状態の存在する条件を与える。つぎに、状態方程式の解として平衡状態確率を完全に与え、系内呼数の平均、分散、系内時間の平均等を求める。最後に若干の数値計算を行ない、図示する。なお、本章で用いられる解析方法は、いわゆる状態方程式による方法である。

10.1 会話形処理の待ち行列モデル

本章で取り扱う待ち行列モデルは、図10.1に示されている。呼は平均到着率 λ で系にポアソン到着し、待ち行列で待っていて順番が来れば、 s 台の処理装置のどれかの処理を受ける。処理時間はたがいに独立で、平均 $1/\mu$ の指数分布と仮定する。処理が終了すると、呼は系の状態とは独立に一定の非帰還率 $(1-r)$ で系を退去するか、帰還率 r で帰還状態を経た後、再び待ち行列に並ぶ。帰還遅れ時間 (処理が終了してから、つぎの処理を待つために待ち行列に並ぶまでの時間) は、平均 $1/\nu$ のたがいに独立な指数分布とする。待ち行列における待ち規律は、新しく外部から到着した呼と帰還されて来た呼とは同等に、先着順に並び、先頭から処理されるものとする。

呼を利用者、あるいは利用者のジョブと考え、 s 台の処理装置をマルチプロセッサの中央処理装置、待ち行列は主記憶装置に入っている利用者 (のプログラム) あるいはジョブで中央処理装置の空きを待っているものの集合、帰還遅れ状態を思考時間中の状態と考えれば、会話形処理方式のモデルとなっている。なお帰還遅れ状態は、無限大個の他の処理装置による処理中の状態と

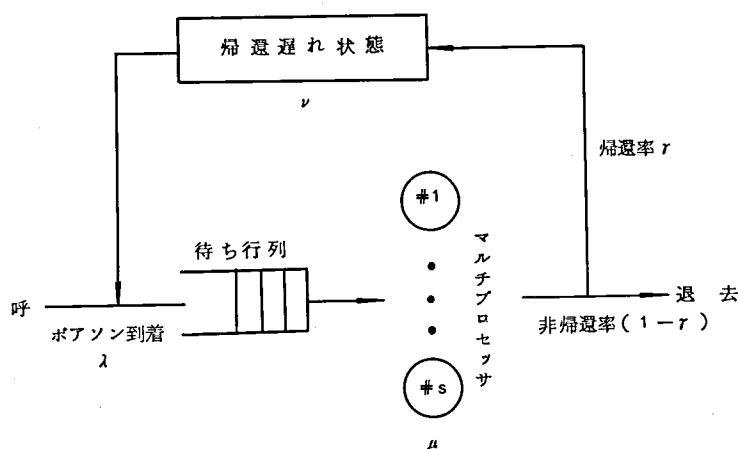


図 1 0. 1 帰還形待ち行列モデル

考えても良いことは明らかである。したがって、入出力機器を多数設置した情報処理システムでは、帰還遅れ状態として思考時間以外に、これら入出力機器の使用中的の状態を含めることもできよう。ただし、入出力機器を使用するとき、待たされることが余り無いことを条件とする必要がある。

上述のモデルと実際の会話形処理システムとの相違について述べる。まずポアソン到着、処理時間および遅れ時間の指数分布を仮定し、いわゆるポアソン形の待ち行列モデルとしている。これは、むしろ解析の容易さのための仮定であって、実際と異なる可能性がある。しかし、結果として得られる平均特性などは余り差がないと思われる。

また帰還率 r を一定として解析するが、これも問題点の一つである。 n 回処理を受ける呼の全処理時間の分布関数 $H_n(x)$ は

$$H_n(x) = H^{*n}(x)$$

である。ただし

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-\mu x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

で、 $*n$ は n 重の畳み込み (convolution) を表わす記号とする。したがって、この呼の平均処理時間は n/μ である。ある呼が、ちょうど n 回処理を受ける確率は

$$(1-r)r^{n-1}$$

であるから、処理回数について条件をつけない、ある呼の全処理時間の分布関数 $H_0(x)$ は

$$H_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-r)r^{n-1} H_n(x)$$

と仮定することになる。また全処理時間の平均は

$$1 / \{ (1-r)\mu \}$$

となる。そこで現実の処理時間分布と比較して、 r を一定とする仮定ができるか確認する必要がある。帰還率 r の値は、その値が大きい場合にはとくに、系のふるまいに大きな影響を与えるので、実際のシステムに解析結果を適用するとき、とくに注意する必要がある。

最後に、上述のモデルでは中央処理装置が主記憶装置にアクセスする場合に、処理装置同志衝突することを無視している。すなわち同時に2台以上の中央処理装置が主記憶装置にアクセスするときに、どの中央処理装置も待たされることはないと仮定していることになる。したがって、この待ち時間が十分無視できる程度であることを確認する必要がある。なお、最近の情報処理システム、ことにマルチプロセッサシステムの場合には、主記憶装置以外にさらに高速で、上位のローカルメモリを各中央処理装置に付置することがある。このようなシステムにおいては、主記憶装置における衝突が、中央処理装置を待たせることに余り影響を与えない。

本章で取扱う待ち行列モデルの原形は、文献 [Tak], [Chg], [En] 等に見られる、帰還形待ち行列モデルである。また、最近では、周期処理モデルの帰還形待ち行列の解析 ([Chn]) もある。いずれも、帰還遅れ状態を経ずに、即刻待ち行列に帰還するモデルに関する解析であった。

1 0.2 状態方程式

1 0.2.1 状態推移

前節で説明したように、取り扱う待ち行列モデルは、ポアソン形を仮定しているので、状態方程式を立てて解析できる見込みがある。時刻 t に、処理中の呼も含めて待ち行列にある呼数を $\xi(t)$ 、帰還遅れ状態にある呼数を $\eta(t)$ と書き表わせば、 $(\xi(t), \eta(t))$ によって系の状態を表示でき、しかもマルコフ過程となることが直ちに示される。

上記の系の状態に対する、時間的な推移を図 1 0.2 に示す。微小時間 dt における状態推移を、

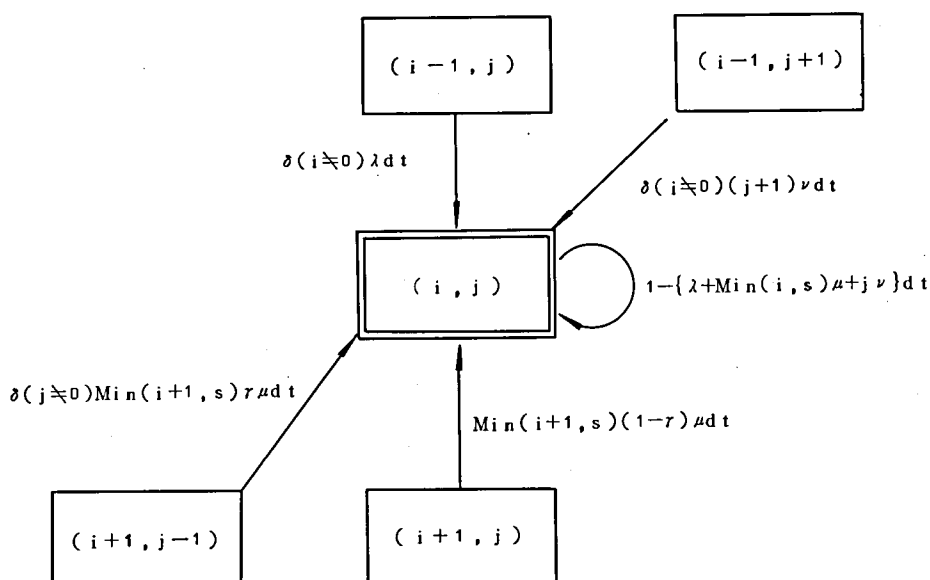


図 1.0.2 状態推移図

状態 (i, j) , $i, j \geq 0$ への推移に限って、推移確率は高位の無限小を無視して書いてある。また、図中の推移確率の表示中にも用いてある Kronecker のデルタ $\delta(E)$ は次式で定義される。

$$\delta(E) = \begin{cases} 0 & \text{事象 } E \text{ が成立しないとき} \\ 1 & \text{事象 } E \text{ が成立するとき} \end{cases} \quad (1.0.1)$$

状態確率を

$$p(i, j; t) = \text{Prob} \{ \xi(t) = i, \eta(t) = j \} \quad (1.0.2)$$

と定義すれば、状態推移を表わす式は

$$\begin{aligned} p(i, j; t+dt) = & [1 - \{\lambda + \text{Min}(i, s)\mu + j\nu\}dt] p(i, j; t) \\ & + \delta(i \neq 0) \{ \lambda dt p(i-1, j; t) + (j+1)\nu dt p(i-1, j+1; t) \} \\ & + \text{Min}(i+1, s)\mu dt \{ \delta(j \neq 0)r p(i+1, j-1; t) + (1-r)p(i+1, j; t) \} \\ & + o(dt) \quad (i, j \geq 0) \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

となる。

1 0.2.2 状態方程式の導出

(1 0.3) 式の両辺について, $dt \rightarrow 0$ の極限を取れば

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(i, j; t) = & -\{\lambda + \text{Min}(i, s)\mu + j\nu\}p(i, j; t) \\ & + \delta(i \neq 0)\{\lambda p(i-1, j; t) + (j+1)\nu dt p(i-1, j+1; t)\} \\ & + \text{Min}(i+1, s)\mu dt\{\delta(j \neq 0)r p(i+1, j-1; t) + (1-r)p(i+1, j; t)\} \\ & (i, j \geq 0) \end{aligned} \quad (1 0.4)$$

となる。これが、過渡状態も含む完全な状態方程式である。ここで、考えている待ち行列系が統計的平衡状態に達していると仮定して

$$\frac{\partial p}{\partial t}(i, j; t) = 0 \quad (1 0.5)$$

と置いて得られる方程式は、平衡状態に対する状態方程式（普通は単に状態方程式と呼ぶ）である。

今後は、平衡状態における状態確率のみを問題とするものとし、 $p(i, j; t)$ の代りに、時間変数 t を落して $p(i, j)$ と書き表わすことにする。さらに、確率母関数を

$$\left. \begin{aligned} A_i(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} p(i, j) y^j \quad (i \geq 0) \\ P(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i(y) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p(i, j) x^i y^j \end{aligned} \right\} \quad (1 0.6)$$

の形で定義すると、(1 0.5) 式を (1 0.4) 式に用い、両辺に $x^i y^j$ を掛けて総和を取れば、

$$\begin{aligned} & \{\lambda(x-1) + \nu(x-y) \frac{\partial}{\partial y}\} P(x, y) \\ & + \mu \left(\frac{ry+1-r}{x} - 1 \right) \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i x^i A_i(y) + s \sum_{i=s+1}^{\infty} x^i A_i(y) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1 0.7)$$

が得られる。上式中、 $\lambda(x-1)P(x, y)$ は系の外部から新しく到着する呼数による変化分、左辺第1項の残りの部分は、帰還遅れ状態が終了して再び待ち行列に並ぶ呼数による変化分、第2項は処理が終了して系から退去したり、帰還遅れ状態に入ったりする呼数による変化分に相当する。上式は、統計的平衡状態において、これらの変化分の和が0であることを示している。(1 0.7)

式は、確率母関数を用いているが、今考えている待ち行列系の状態方程式である。

なお、(1 0.7)式においては、(1 0.6)式で定義される2種類の確率母関数を用いて表現したが、それらの定義からも明らかなように $P(x, y)$ だけを用いて表現することもできる。あとで計算を進める都合上と、表示が見易いことと、 $A_i(y)$ は処理中または待ち合わせ中の呼数が i であるという条件を含んだ確率母関数であり、明確な意味を持っているので、これらの補助的な確率母関数も導入して表わした。

この状態方程式(1 0.7)は、未知関数 $P(x, y)$ に関して、その特別な関数値 $A_i(y)$ も含んだ偏微分方程式となっており、一般的な偏微分方程式の解法によって解ける見込みは無さそうである。

1 0.3 平衡条件

前節で、確率母関数を用いて表わされる状態方程式(1 0.7)を求めるとき、その前提条件として、考えている待ち行列系の統計的平衡状態の存在を仮定した。ここで、その平衡条件について考えてみる。

1 0.1 で説明したように、帰還遅れ状態は無限大個の処理装置があって、それらによる処理中であることと全く等価である。それらの平均処理時間、したがって帰還遅れ時間が $1/\nu < \infty$ 、すなわち $\nu > 0$ である限り、平衡条件には何ら影響を与えない。ゆえに、残りの s 台の処理装置の方が問題となる。この s 台の処理装置に対する呼の平均到着率は、帰還する分も含めて

$$\lambda / (1 - r)$$

であるから、

$$\frac{\lambda}{(1-r)s\mu} < 1 \quad (1 0.8)$$

が不飽和条件であり、系全体の平衡条件である。

1 0.4 状態方程式の解

1 0.4.1 基礎考察

本節では、1 0.2.2 で求めた状態方程式の解を求める。その前に、待ち行列に対する入力過程および帰還遅れに対する入力過程について考察する。

まず帰還遅れ状態から待ち行列への帰還ループを切り離したモデルを考えると、待ち行列に対する入力過程は係数 λ のポアソン過程であり、 s 台の処理装置からの出力過程は、文献〔B〕の結果によれば平衡状態において、やはり係数 λ のポアソン過程となる。さらに、独立な帰還率 r によっても支配される、帰還遅れ状態に対する入力過程は、係数 $r\lambda$ のポアソン過程となり、やはり〔B〕の結果を $M/M/\infty$ モデルまで拡張して考えれば、その出力過程も係数 $r\lambda$ のポアソン過程となる。

複数個のポアソン過程を重ねさせた確率過程は、明らかに、もとのポアソン過程の係数の和を係数とするポアソン過程となる。したがって、ループを元通りつないだモデルでも、上述のループを切り離したモデルと同様に、各所の入力過程、出力過程はすべてポアソン過程となる。ただし、それらの係数は帰還する分も考慮して決定しなければならない。

待ち行列に対する平均到着率 λ_1 は、無限回までの帰還分も含めて考えると、

$$\lambda_1 = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{\lambda}{1-r} \quad (10.9)$$

である。ただし、収束するための条件として

$$0 \leq r < 1$$

が必要である。 $r=1$ では、一度系に入った呼はほとんど系から退去しないことを意味するので $r=1$ が除かれる意味は明らかである。帰還遅れ状態に対する入力過程の係数 λ_2 は、 s 台の処理装置からの係数に帰還率 r を掛けた値であるから

$$\lambda_2 = r\lambda_1 = \frac{r\lambda}{1-r} \quad (10.10)$$

となる。

10.4.2 解の導出と等価モデル

状態方程式 (10.7) の解について仮説を立ててみる。統計的平衡状態における系内呼数 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ を、時間度 t を落して、 ξ 、 η でそれぞれ表わし、

$$p(i, j) = \text{Prob}\{\xi=i\} \text{Prob}\{\eta=j\} \quad (10.11)$$

としてみる。すなわち、帰還遅れ状態にある系内呼数 η と、処理中も含めて待ち合わせ中の呼数 ξ とがたがいに独立であると仮定してみる。前項の考察から、 ξ の分布は平均到着率 λ_1 、平均処

理時間 $1/\mu$ の $M/M/s$ 待ち行列系の系内呼数分布となり、 η の分布は平均到着率 λ_2 , 平均処理時間 $1/\nu$ の $M/M/\infty$ の待ち行列系の系内呼数分布となる。

待ち行列理論の既知の結果 (たとえば [Ri]) から

$$\text{Prob}\{\xi=i\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\lambda_1/\mu)^i}{i!} p_0 & (0 \leq i < s) \\ \frac{(\lambda_1/\mu)^i}{s! s^{i-s}} p_0 & (i \geq s) \end{array} \right\} \quad (10.12)$$

ただし、
$$\frac{1}{p_0} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda_1/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda_1/\mu)^s}{(s-1)!(s-\lambda_1/\mu)}$$

$$\text{Prob}\{\eta=j\} = \frac{(\lambda_2/\nu)^j}{j!} \exp(-\lambda_2/\nu) \quad (j \geq 0) \quad (10.13)$$

である。

(10.9) ~ (10.13) 式を用いて、計算した結果得られる確率母関数 $P(x, y)$ が、状態方程式 (10.7) の解になっていることが証明できる。以下でそれを示す。(10.11) ~ (10.13) 式から

$$A_i(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\lambda_1/\mu)^i}{i!} p_0 \exp\{-\lambda_2(1-y)/\nu\} & (0 \leq i < s) \\ \frac{(\lambda_1/\mu)^i}{s! s^{i-s}} p_0 \exp\{-\lambda_2(1-y)/\nu\} & (i \geq s) \end{array} \right\} \quad (10.14)$$

$$P(x, y) = p_0 \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{(\lambda_1 x/\mu)^i}{i!} + \frac{s^s}{s!} \sum_{i=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 x}{\mu s}\right)^i \right\} \exp\{-\lambda_2(1-y)/\nu\} \quad (10.15)$$

が得られる。これらと (10.9), (10.10) 式を用いて (10.7) 式の左辺の第1項, 第2項を計算すると,

$$\begin{aligned} \text{第1項} &= \{\lambda(x-1) + \lambda_2(x-y)\} P(x, y) \\ &= \lambda \left(\frac{x-y}{1-r} - 1 \right) P(x, y) \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned}
\text{第2項} &= \mu \left(\frac{ry+1-r}{x} - 1 \right) p_0 \left\{ \sum_{i=1}^s \frac{(\lambda_1 x/\mu)^i}{i!} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x/\mu)^i}{s! s^{i-s-1}} \right\} \exp \{ -\lambda_2(1-y)/\nu \} \\
&= \lambda_1 (ry+1-r-x) p_0 \sum_{i=0}^s \left\{ \frac{(\lambda_1 x/\mu)^i}{i!} + \frac{s!}{s!} \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x/\mu)^i}{\mu^s} \right\} \exp \{ -\lambda_2(1-y)/\nu \} \\
&= \lambda \left(1 - \frac{x-ry}{1-r} \right) P(x, y) \quad (10.17)
\end{aligned}$$

と書き変えることができ、(第1項)+(第2項)=0であるから、(10.7)式が成立する。

以上で、(10.15)式が、状態方程式(10.7)の解になっていることが証明された。

したがって、(10.15)式で表わされる $P(x, y)$ が求めたかった統計的平衡状態確率に対する確率母関数であり、系内呼数分布を完全に表わしている。その結果、(10.11)式の仮定が正しかったことになり、図10.1に示したもとの待ち行列モデルの代りに、図10.3に示す等価モデルで十分なことが明らかになった。すなわち、平均到着率がそれぞれ(10.9)、(10.10)式で与えられる λ_1 、 λ_2 のたがいに独立な2つの待ち行列と見てよい。ただし、このようなモデルの等価性は、あくまでも系内呼数分布に関して成立する事実であって、他の量、たとえば系内時間等については、一般には成立しないことは勿論である。

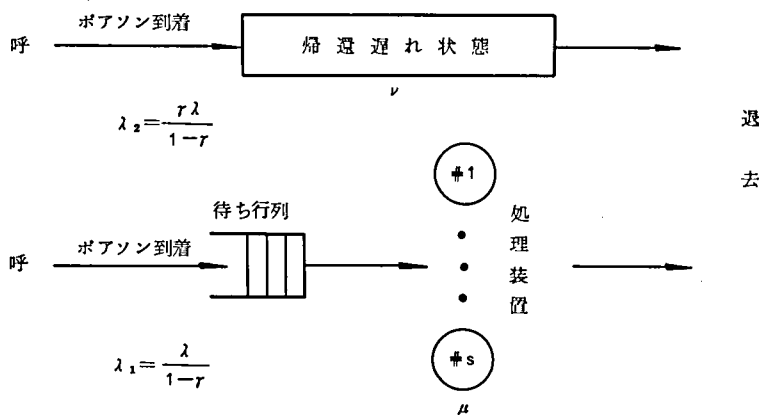


図10.3 等価モデル

1 0.5 平均特性

1 0.5.1 系内呼数の平均および分散

統計の平衡状態における処理中および待ち合わせ中の呼数 ξ , 帰還遅れ状態にある呼数 η および全系内呼数 $\xi + \eta$ の平均, 分散を

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= E\{\xi\}, & L_2 &= E\{\eta\}, & L &= E\{\xi + \eta\} \\ V_1 &= \text{Var}\{\xi\}, & V_2 &= \text{Var}\{\eta\}, & V &= \text{Var}\{\xi + \eta\} \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

で表わせば, 既知の結果を用いて計算でき

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{(\lambda_1/\mu)^{s+1}}{(s-1)!(s-\lambda_1/\mu)^2} p_0 + \lambda_1/\mu \\ L_2 &= \lambda_2/\nu \\ L &= L_1 + L_2 \\ V_1 &= p_0 \sum_{n=1}^{s-1} \frac{n(\lambda_1/\mu)^n}{(n-1)!} + p_0 \frac{(\lambda_1/\mu)^s}{(s-1)!} \left\{ \frac{(s+\lambda_1/\mu)^s}{(s-\lambda_1/\mu)^s} + \frac{2s(s-1)}{(s-\lambda_1/\mu)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s-1)^2}{s-\lambda_1/\mu} \right\} - L_1^2 \\ V_2 &= \lambda_2/\nu \\ V &= V_1 + V_2 \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

となる。

ただし, p_0 は (10.12) 式で与えられている。上式中, 全系内呼数の分散 V が V_1 と V_2 の和で表わされることは, (10.11) 式で表わされている独立性から成立する。

系内呼数に関しては, さらに細かく, 既に経過した帰還回数で区別した内訳についても検討できるが, あまり意味も無いし, 次節で述べる平均系内時間を求める際にも必要が無いので省略する。なお, 文献〔N〕ではこの点についても, かなり詳細に検討されている。必要があれば, 本章で扱ったようなマルチプロセッサの場合も, まったく同様に検討できる。

1 0.5.2 平均系内時間

これまで、状態方程式を導き、その解を求めて、その解から平均、分散を計算してきたが、いずれも系内呼数の分布に関するものであった。本章では、平均系内時間、すなわち呼が系に到着してから系を退去するまでの時間の平均を求めることにする。

平均系内時間のうち、帰還遅れ状態にある平均時間は1回当たり

$$W_2 = 1/\nu \quad (10.20)$$

であることは、モデルの説明から明らかである。また、待ち行列と、 s 台の処理装置から成る部分待ち行列系を考えれば、10.4 で述べたことから、等価な平均到着率 λ_1 の $M/M/s$ 待ち行列モデルである。この部分系の平均系内時間は

$$W_1 = L_1 / \lambda_1 \quad (10.21)$$

与えられることは、Little の証明した定理 ([L], または 9.5.2 参照) により得られる。呼のすでに受けた処理回数あるいは帰還回数により、処理の順序が何ら差別されることはないのでこの W_1 がともかくも待ち行列に並んだ呼が処理終了までに経過する平均時間となり、したがって待ち時間も含めて処理装置内での1回当たりの平均系内時間である。したがって、この W_1 は平均応答時間である。 λ_1 は (10.9) 式に与えられている。

n 回の処理を受けて、したがって $n-1$ 回の帰還を経て、系から退去する呼の平均系内時間を $W(n)$ で表わせば、上の考察から

$$W(n) = n W_1 + (n-1) W_2 \quad (10.22)$$

が成立する。 $W(n)$ は条件付きの平均系内時間であったが、このような条件をつけない平均系内時間 W は、 n 回処理を受ける確率 $(1-r) r^{n-1}$ を考慮した荷重平均

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-r) r^{n-1} W(n) \\ &= (W_1 + r W_2) / (1-r) \end{aligned} \quad (10.23)$$

により求められる。これは、系全体に対して Little の定理を適用して得られる

$$W = L / \lambda$$

$$= (L_1 + L_2) / \lambda \quad (10.24)$$

と完全に一致することは言うまでもない。

10.6 数値計算例

これまでの解析結果に基づき、数値計算した結果を若干例、図示する。

まず、(10.8)式によって、平衡状態の存在する条件、または系の不飽和条件を図10.4に示す。処理装置の台数 s をパラメータとして、平均到着率 λ と帰還率 r が取り得る範囲を、斜線を施した側で示した。すなわち原点を含む側である。ただし $\mu = 1$ とする。

つぎに、待ち行列に対する等価な平均到着率 λ_1 、帰還遅れに対する平均到着率 λ_2 を、系に対する平均到着率 λ との比によって、図10.5に示す。これは(10.9)、(10.10)式に基づいている。

図10.6、図10.7はそれぞれ、処理中または待ち合わせ中の系内呼数の平均 L_1 、分散 V_1 を(10.19)式に基づいて数値計算し、プロットしたものである。処理装置の多重度 $s = 1, 2, 3$ 、帰還率 $r = 0.2, 0.8$ に対する曲線が描かれている。平均処理時間を単位時間にとっている。すなわち $\mu = 1$ と仮定する。以下でも同様とする。

帰還遅れ状態にある系内呼数の平均 L_2 と分散 V_2 とは全く同一の式で表わされる(参照(10.19)式)。横軸に λ/ν 、すなわち帰還遅れの呼量を取り、帰還率 $r = 0.2, 0.8$ をパラメータとして図示したものが、図10.8である。無論 s には依らない。

全系内呼数の平均 L 、分散 V は、 λ 、 μ 、 ν 、 s を与えれば、図10.6～図10.8から容易に求められるので省略する。

待ち時間も含めて、処理装置における1回当りの平均系内時間を(10.21)式に基づいて数値計算し、図10.9に示した。系内呼数の場合と同様に $s = 1, 2, 3$ ； $r = 0.2, 0.8$ の場合が描かれている。

帰還遅れ状態にある平均系内時間は $1/\nu$ であり、図示するまでもないので省略する。また、帰還回数を条件として付けた平均系内時間も、これらの結果から、(10.22)式に基づいて計算できるが、計算自体も比較的容易であるから省略する。(10.23)式あるいは(10.24)式による、無条件の全系内時間の平均を図10.10に示す。やはり、 $s = 1, 2, 3$ ； $r = 0.2, 0.8$ をパラメータとし、 $\mu = 1$ 、 $\nu = 0.1$ の条件で数値計算した。

以上の数値計算結果を見ると、 r の値の大きい方が、系内時間、系内呼数ともに大きくなり、

処理装置の多重度 s が大きい方が、系内時間、系内呼数とも小さくなることは当然である。その外に、全般的な傾向として、 $s=2$ と $s=3$ との差よりも、 $s=1$ と $s=2$ との差の方が大きいことが現われている。すなわち、多重度 s が大きくなるに従い、系内時間（この中には、利用者から見て、とくに重要視される応答時間も含まれる）が減り、良好なサービスを与えるようにできるが、この多重度から、たとえば1つ多重度を上げて $s+1$ にしたときの効果は次第に減少する傾向にある。

また、 r の値による、各量の変化は非常に大きいことも、よく現われている。したがって、予想通りであるが、実際のシステムにこのモデルを適用する場合には、帰還率 r の推定が重要な問題となる。

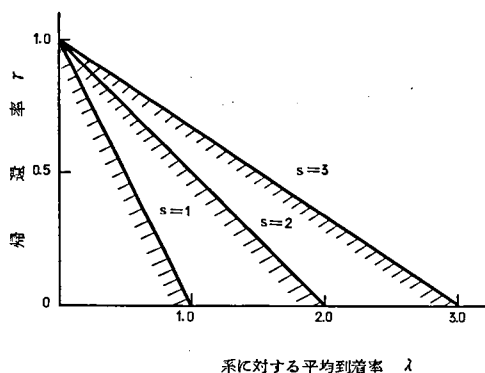


図 1.0.4 平衡条件（不飽和条件）

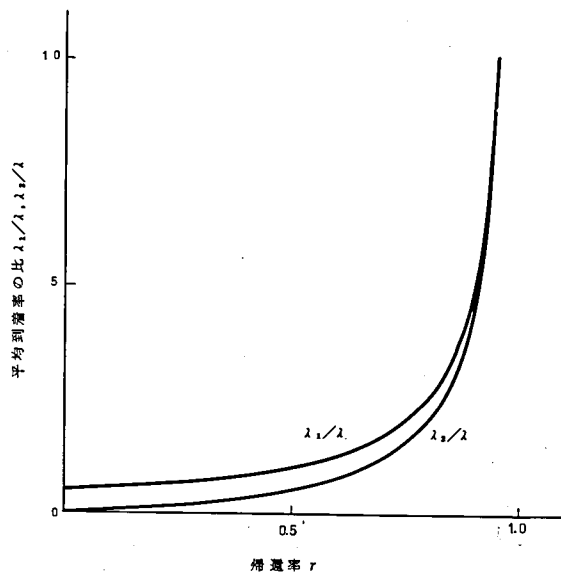


図 1.0.5 等価な平均到着率

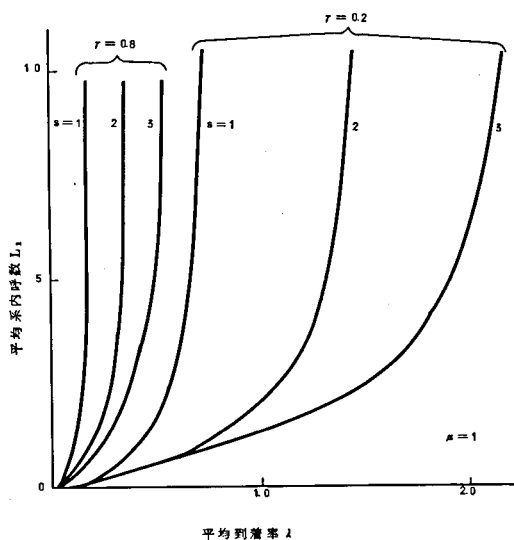


図 1.0.6 処理中または待ち合わせ中の平均系内呼数 L_1

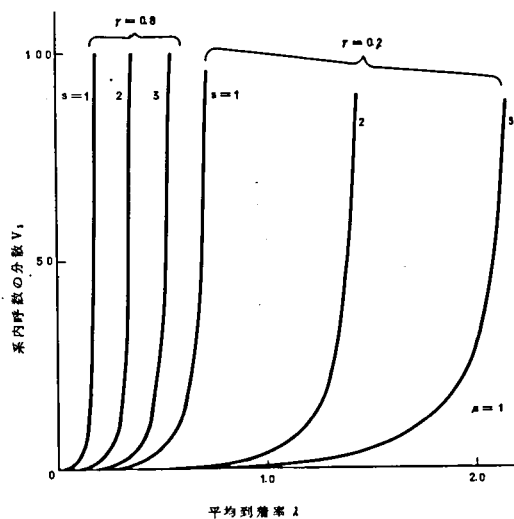


図 1.0.7 処理中または待ち合わせ中の系内呼数の分散 V_1

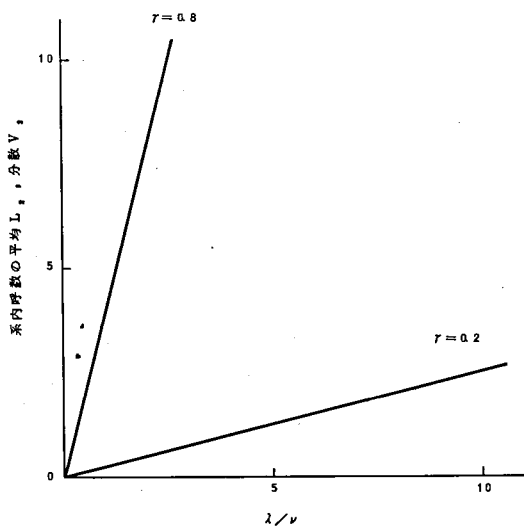


図 1.0.8 帰還遅れ状態にある系内呼数の平均 L_2 , 分散 V_2

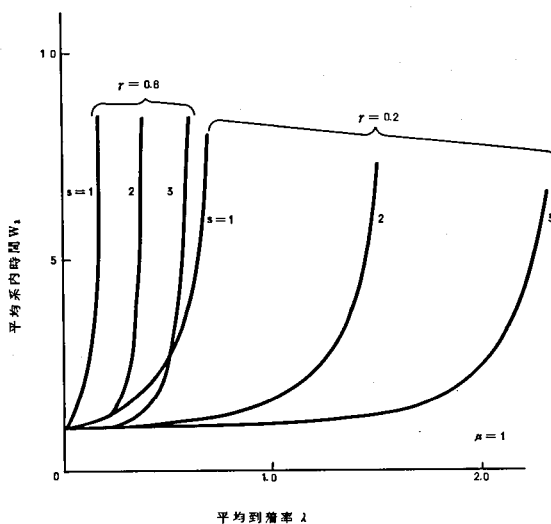


図 1.0.9 処理装置における 1 回当たりの平均系内時間 W_1

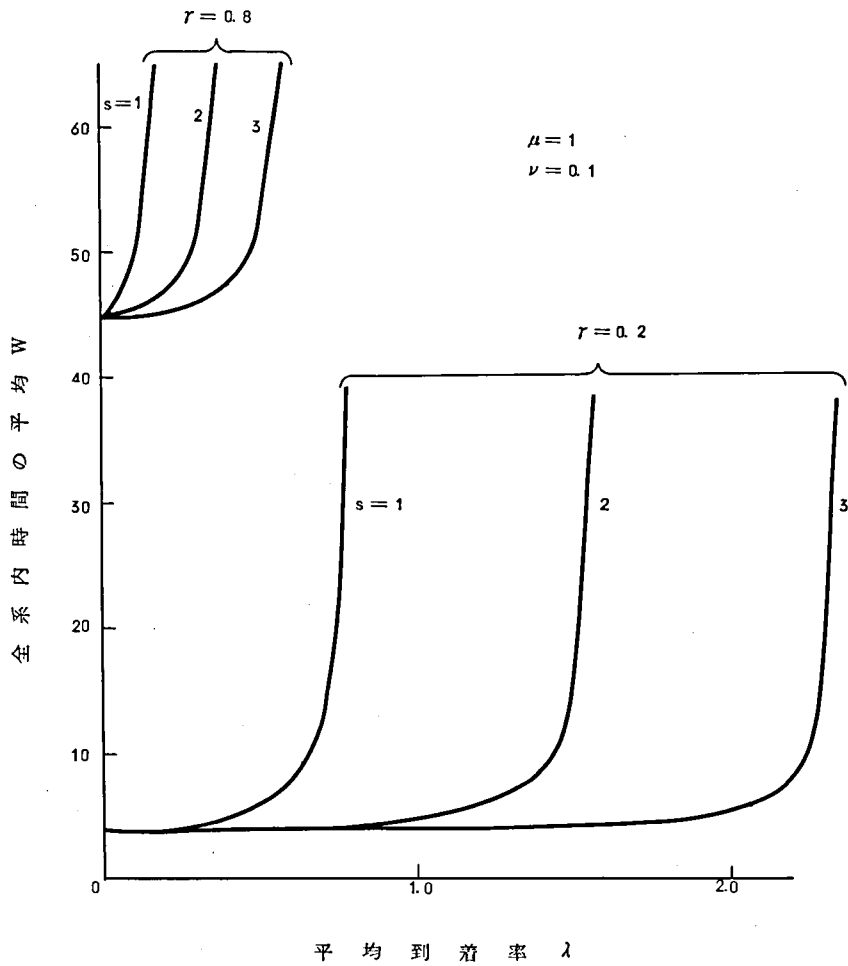


図 1 0.1 0 全系内時間の平均 W

第11章 第Ⅱ部の結論

本研究第Ⅱ部では、情報処理システムにおいて現われる多くの待ち合わせ問題のうち、第8章では、基本的な待ち行列モデルの1つであるM/G/∞モデル、第9章では、タイムシェアリングシステムのスケジューリング方式の一つである多段帰還方式、第10章では、多重処理装置による会話形処理の一モデルを取り上げ、それぞれ解析した。

各章で得られた主要な結果をまとめる。

まず、第8章ではM/G/∞待ち行列モデルに対して、各処理装置の動作時間を考えて解析を試みた。

(i) ∞台の処理装置の動作時間を、仮想的待ち時間と分離して定義し、その確率過程としての性質を明らかにした。すなわち、動作時間の確率連続性、その同時分布関数の連続性、極限分布の存在を示した。

(ii) 動作時間が∞次元のマルコフ過程をなすことを示し、その同時分布関数を支配する方程式を得た。それは、偏微分、多重積分を含む方程式である。

(iii) さらに、動作時間の同時分布が、呼の到着時点と任意時点とで一致することを示すととも、定常分布を持つ条件を吟味し、必要条件を得た。

(iv) 動作時間、仮想的待ち時間、真の待ち時間の関係から、待ち時間分布関数が動作時間分布関数から求められることを示した。

(v) 先に得られた方程式を数値解析し、動作時間分布関数を求め、さらにこれから待ち時間分布関数を求めた結果、M/M/2、M/D/2モデルに対し既知の理論結果と、到着率が小さいときかなり良く一致することを確認した。

上述のように、M/G/∞の解析は、試みとしてはかなり成功したが、数値解析を行なうとき一部の状態確率を必要としたため、便法は種々考えられるにしても、不十分な点がある。また数値解析もさらに高精度にすることなどが今後の問題点である。

第9章では、多段帰還方式の系内呼数分布を解析した。

(vi) 各水準の系内呼数を成分とするベクトルを、考えている多段帰還待ち行列モデルの状態として、各量子終了直後時点の状態がマルコフ連鎖をなすことを示し、状態推移を考慮して平衡状態確率の母関数についての方程式を得た。

(vii) この方程式の解法を示し、その解の存在、一意性を示した。また、同時に、平衡状態の存在する条件を与えた。

(viii) ついで、量子終了直後の系内呼数分布から、セミマルコフ過程の理論により、任意時点における系内呼数分布を、やはり母関数の形で得た。

(ix) 系内呼数のモーメントを計算する方法を与えた。平均については計算式を与え、標準偏差ではその計算法を具体的に与えた。

(x) 平均系内呼数については、さらに平均待ち時間から Little の関係式により計算する別法を与えた。

現実の情報処理システムのスケジューリング方式は、さらに複雑であるが、このような比較的単純なモデルの解析結果でも、システム検討の際の基礎資料を提供するための道具として役立つと思われる。ただしそのためには、システムの外部条件（利用者の特性等）、内部条件（準備時間の分布等）を明らかにする必要がある。モデルをより現実的なものに近づける方向で、系内呼数に制限を設けたモデルも、その後解析されている（〔Kaw〕）。

第10章では、多重処理装置による会話形処理モデルとして、帰還遅れ状態を伴う帰還形待ち行列を考え解析した。

(xi) 処理中および待ち合わせ中の呼数と帰還遅れ状態にある呼数の同時分布に対する状態方程式を求めた。

(xii) 状態方程式を一般的な解法で解くことはできなかったが、平衡状態の存在する条件を明らかにするとともに、モデルに対して若干の考察を加えて、系内呼数分布の独立性を仮定してみた結果、解を得ることができた。

(xiii) 系内呼数の平均、分散、系内時間の平均を計算することができ、数値計算例を与えた。

ここで扱った帰還形待ち行列モデルは、情報処理システム内で、ほかにも見られる。ただし、会話形処理でもそうであるが、処理装置同志が、他の部分における呼の衝突あるいは閉そくのために待つことが多いときには適用できないという限界のあることは注意しなくてはならない。

謝 辞

本論文を終わるに当り，京都大学前田憲一教授，矢島脩三助教授には，筆者が在学中以来直接研究を指導して頂き，論文をまとめるに際しても種々御教示ならびに御激励頂いたことを感謝します。また，日本電信電話公社電気通信研究所藤木正也トラヒック研究室長，雁部頼一企画調査室調査役，中村義作第一研究室調査役にも，種々御指導，御助言を頂き感謝します。京都大学前田研究室の諸氏，ならびに電気通信研究所トラヒック研究室村尾洋調査役，橋田温調査員，川島幸之助社員ほかの諸氏にも，研究を進め，まとめるに当り有益な御討論，御協力を頂いたことを感謝します。

参 考 文 献

第 I 部に対する参考文献

- [ADH] J.L.Allard, A.R.Dobell and T.E.Hull: "Mixed Congruential Random Number Generators for Decimal Machines", J.ACM, Vol.10, pp.131-141(1963).
- [AFR] G.C.Anderson, B.W.Finnie and G.T.Roberts: "Pseudo-Random and Random Test Signals", Hewlett-Packard J., Vol.19, No.1(1967-09).
- [Ba] V.D.Barnett: "The Behavior of Pseudo Random Sequences Generated on Computers by the Multiplicative Congruential Method", Math.Comp., Vol.16, pp.63-69(1962).
- [BB1] E.Bofinger and V.J.Bofinger: "On a Periodic Property of Pseudo-Random Sequences", J.ACM, Vol.5, pp.261-265(1958-03).
- [BB2] ----- and -----: "The Gap Test for Random Sequences", Ann.Math.Statist., Vol.32, pp.524-534(1961).
- [Bu1] J.C.Butcher: "Random Sampling from the Normal Distribution", Computer J., Vol.3, pp.251-253(1961).
- [Bu2] -----: "A Partition Test for Pseudo-Random Numbers", Math.Comp., Vol.15, pp.198-199(1961).
- [C] J.E.Certaine: "On Sequences of Pseudo-Random Numbers of Maximal Length", J.ACM, Vol.5, pp.353-356(1958-03).
- [Ch] G.J.Chaitin: "On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences", J.ACM, Vol.13, No.4, pp.547-569(1966-10).
- [CM] R.R.Coveyou and R.D.Macpherson: "Fourier Analysis of Uniform Random Number Generators", J.ACM, Vol.14, pp.100-119(1967-01).
- [Co] R.R.Coveyou: "Serial Correlation in the Generation of Pseudo-Random Numbers", J.ACM, Vol.7, pp.72-74(1960-03).
- [E] A.R.Edmonds: "The Generation of Pseudo-Random Numbers on Electronic Digital Computers", Computer J., Vol.2, pp.181-185(1960).
- [EG] B.M.Eisenstadt and B.Gold: "Autocorrelations for Boolean Functions of Noiselike Periodic Sequences", IRE Trans., Vol.EC-10, pp.383-388(1961-09).
- [El] B.Elspas: "The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks", IRE Trans., Vol.CT-6, No.1, pp.45-60(1959-03).
- [F] J.N.Franklin: "Deterministic Simulation of Random Processes", Math.Comp., Vol.17, pp.28-59(1963).
- [Fr] B.Friedland: "Linear Modular Sequential Circuits", IRE Trans., Vol.CT-6, No.1, pp.61-68(1959-03).
- [FY] 福島正俊, 矢島脩三: "2進乱数変換のモンテカルロ法による計算", 電気四学会関西連大G7-5(1969).
- [Gi1] A.Gill: "On a Weight Distribution Problem, with Application to the Design of Stochastic Generators", J.ACM, Vol.10, pp.110-121(1963-04).
- [Gi2] -----: "Analysis of Linear Sequential Circuits by Confluence Sets", IEEE Trans., Vol.EC-13, pp.226-231(1964-06).
- [Gils] R.P.Gilson: "Some Results of Amplitude Distribution Experiments on Shift Register Generated Pseudo-Random Noise", IEEE Trans., Vol.EC-15, pp.926-927(1966-12).

- [Gr1] M.Greenberger: "Notes on New Pseudo-Random Number Generator", J.ACM. Vol.8. pp.163-167(1961-03).
- [Gr2] -----: "An A Priori Determination of Serial Correlation in Computer Generated Random Numbers", Math.Comp., Vol.15, pp.383-389(1961), and Corrigenda, Math. Comp., Vol.16, p.126(1962).
- [GSK] B.F.Green, Jr., J.E.K.Smith and L.Klem: "Empirical Tests of an Additive Random Number Generator", J.ACM, Vol.6, pp.527-537(1959-03).
- [H] H.B.Horton: "A Method for Obtaining Random Numbers", Ann. Math.Statist., Vol.19, pp.81-85(1948).
- [Ha] C.B.Haselgrove: "A Method for Numerical Integration", Math.Comp., Vol.15, pp.323-337(1961).
- [HAI] 平井平八郎, 浅井喜代治, 石桁正士: "ランダム・ウォーク装置と乱数検定への応用", 電子計算機研資(1963-01).
- [HD1] T.E.Hull and A.R.Dobell: "Random Number Generators", SIAM Rev., Vol.4, No.3, pp.230-254(1962-07).
- [HD2] ----- and -----: "Mixed Congruential Random Number Generators for Binary Machines", J.ACM, Vol.11, pp.31-40(1964).
- [HS] H.B.Horton and R.T.Smith, III: "A Direct Method for Producing Random Digits in Any Number System", Ann.Math.Statist., Vol.20, pp.82-90(1949).
- [IBM] IBM Corp.: "Random Number Generation and Testing", Reference Manual, C20-8011(1959).
- [J1] D.L.Jagerman: "The Autocorrelation Function of a Sequence Uniformly Distributed Modulo 1", Ann.Math.Statist., Vol.34, pp.1243-1252(1963).
- [J2] -----: "Some Theorems Concerning Pseudo-Random Numbers", Math.Comp., Vol.19, pp.418-426(1965).
- [K1] A.N.Kolmogorov: "On Tables of Random Numbers", SANKHA, Ser.A. Vol.25, No.4, pp.369-376(1963).
- [K2] -----: "Logical Basis for Information Theory and Probability Theory", IEEE Trans., Vol.IT-14, No.5, pp.662-664(1968-09).
- [Ka1] H.Kaneko: "A Few Probabilistic Properties of Modular Circuits", NEC Res. & Dev., Vol.6, pp.58-68(1963-12).
- [Ka2] 金子尚志: "モジュラー回路の確率的入出力特性に関する考察", インホメーション理論研資(1965-01).
- [Kan] 金田悠紀夫: "タイムシェアリングシステムのシミュレーション", 信学論(C), Vol. 53-C, No.2, pp.119-125 (1970-02).
- [KMM] K.Kunisawa, H.Morimura and Y.Mizuno: "Queuing Simulator and Its Applications", Preprint for TIMS & ORSJ Joint Int'l Meeting, C2, Tokyo(1963-08).
- [Kr] R.Kronmal: "Evaluation of a Pseudorandom Normal Number Generator", J.ACM, Vol.11, No.2, pp.357-363(1964-07).
- [KT] 喜安善市, 戸田厳: "最大周期非線形帰還形シフトレジスタ", 研究実用化報告 Vol. 11, No.8, pp.1507-1536 (1962-08).
- [Ku] H.G.Kuenn: "A 48-bit Pseudo-Random Number Generator", Comm.ACM, Vol.4, pp.350-352(1961).

- [Le] D.H.Lehmer: "Mathematical Methods in Large-Scale Computing Units", Annals Comp. Laboratory, Harvard Univ., Vol.26, pp.141-146(1951).
- [Li] W.Liniger: "On a Method by D.H.Lehmer for the Generation of Pseudo-Random Numbers", Numerische Math., Vol.3, pp.265-270(1961).
- [LW] H.Levne and J.Wolfowitz: "The Covariance Matrix of Runs Up and Down", Ann. Math.Statist., Vol.15, pp.58-69(1944).
- [M] J.Moshman: "The Generation of Pseudo-Random Numbers on a Decimal Calculator", J.ACM, Vol.1, pp.88-91(1954-03).
- [Ma1] G.Marsaglia: "Expressing Random Variables in Terms of Uniform Random Variables", Ann.Math.Statist., Vol.32, No.3, pp.894-898(1961).
- [Ma2] -----: "Generating Exponential Random Variables", Ann.Math.Statist., Vol.32, No.3, pp.899-900(1961).
- [MaM] M.D.MacLaren and G.Marsaglia: "Uniform Random Number Generators", J.ACM, Vol.12, No.1, pp.83-89(1965-01).
- [Mi] M.L.Minsky: "Recursive Unsolvability of Post's Problem of "Tag" and Other Topics in Theory of Turing Machines", M.I.T. Lincoln Laboratory 54-G-0023(1960-06).
- [Mik] 三上達三: "境界値問題などを解く電気演算装置の研究", 京都大学博士論文(1961).
- [ML] P.Martin-Löf: "The Definition of Random Sequences", Information and Control, Vol.9, pp.602-619(1966).
- [MM] J.W.Moon and L.Moser: "On the Correlation Function of Random Binary Sequences", SIAM J.Appl.Math., Vol.16, No.2, pp.340-343(1968-03).
- [Mul] M.E.Muller: "A Comparison of Methods for Generating Normal Deviates on Digital Computers", J.ACM, Vol.6, pp.376-383(1959-03).
- [P] R.K.Pathria: "A Statistical Study of Randomness among the First 10,000 Digits of π ", Math.Comp., Vol.16, pp.188-197(1962).
- [R] A.Rotenberg: "A New Pseudo-Random Number Generator", J.ACM, Vol.7, pp.75-77(1960-03).
- [Si] 渋谷政昭: "擬似乱数の生成", 数学, Vol.15, No.2, pp.68-71 (1963-10).
- [Sh] C.L.Sheng: "Threshold Logic Elements Used as a Probability Transformer", J.ACM, Vol.12, No.2, pp.262-276(1965-04).
- [Sk1] 佐藤拓宋, 河原田弘: "高速二進乱数の発生とその統計的性質について", 計測と制御, Vol.2, No.3, pp.193-197 (1963-03).
- [SK2] 佐藤拓宋, 岸本成雄: "マルコフ・チェイン発生器とその応用", 計測と制御, Vol. 4, No.1, pp.38-43 (1965-01).
- [SNK] T.Suzuki, Y.Nunotani and O.Kaneda: "Traffic Design and Engineering of Central Processing Systems in an Electronic Switching System", Reprints of Technical Papers, 6th International Teletraffic Congress, 424(1970-11).
- [So1] R.J.Solomonoff: "A Formal Theory of Inductive Inference, Part I", Information and Control, Vol.7, pp.1-22(1964).
- [So2] -----: "A Formal Theory of Inductive Inference, Part II", Information and Control, Vol.7, pp.224-254(1964).

- [St] F.Stockmal: "Calculations with Pseudo-Random Numbers", J.ACM, Vol.11, pp.41-52(1964-01).
- [SW] D.Shanks and J.W.Wrench, Jr.: "Calculation of π to 100,000 Decimals", Math.Comp., Vol.16, pp.76-99(1962).
- [T] R.C.Tausworthe: "Random Number Generated by Linear Recurrence Modulo Two", Math.Comp., Vol.19, No.90, pp.201-209(1965-04).
- [Tak] 高橋秀俊: "計算機械Ⅱ", 岩波書店(1958).
- [UHS] 内山辰丙, 堀川映二, 菅原晟介, 西木俊彦, 水野幸男, 木村正信, 松木顕一: "計数型汎用シミュレーション装置", 情報処理, Vol.8, No.2, pp.73-80(1967-03).
- [Va] A. van Gelder: "Some New Results in Pseudo-Random Number Generation", J.ACM, Vol.14, No.4, pp.785-792(1967-10).
- [Vo] J. von Neumann: "Various Techniques Used in Connection with Random Digits", Monte Carlo Method, Nat.Bur.Stand., Appl.Math. Series 12(1951).
- [W] J.E.Walsh: "Concerning Compound Randomization in the Binary System", Ann. Math.Statist., Vol.20, pp.580-589(1949).
- [We] W.J.Westlake: "A Uniform Random Number Generator Based on the Combination of Two Congruential Generators", J.ACM, Vol.14, No.2, pp.337-340(1967-04).
- [YaY1] 矢島脩三, 吉田裕: "閤素子による2進乱数の発生", 昭40信学会全大S4-6(1965).
- [YaY2] -----, -----: "論理回路の入力, 出力の系列相関の関係", 昭42電気四学会連大2757(1967-05).
- [YI] 矢島脩三, 茨木俊秀: "論理関数とその特性ベクトルの関係について", 信学誌, Vol.50, No.3, pp.377-384(1967-03).
- [YoY1] 吉田裕, 矢島脩三: "組合せ論理回路による乱数の変換", 昭42信学会全大119(1967-11).
- [YoY2] -----, -----: "論理回路による2進乱数の変換", オートマトン研, インホメーション理論研資, $A_{IT} 67-51$ (1968-01).
- [YoY3] -----, -----: "論理回路による2進乱数の系列相関の変換", インホメーション理論研資, $IT 67-57$ (1968-02).
- [YoY4] -----, -----: "組合せ論理回路による2進乱数の変換", 昭43電気四学会連大2633(1968-03).
- [YoY5] -----, -----: "ランダム入力による論理関数の同定について", 昭43信学会全大25(1968-10).
- [YoY6] -----, -----: "2進乱数の改善およびその改善度について", 情報処理, Vol.12, No.3(1971-03). に掲載予定.
- [Z] N.Zierler: "Linear Recurrence Sequences", SIAM J., Vol.7, pp.31-48(1959-03).

第Ⅱ部に対する参考文献

- [A] I.Adiri: "Computer Time-Sharing Queues with Priorities", J.ACM, Vol.16, No.4, pp.631-645(1969-10).
- [AA1] I.Adiri and B.Avi-Itzhak: "A Time Sharing Queue with a Finite Number of Customers", J.ACM, Vol.16, No.2, pp.315-323(1969-04).
- [AA2] ----- and ----- : "A Time-Sharing Queue", Management Science, Vol.15, No.11, pp.639-657(1969-07).
- [AA3] ----- and ----- : "A Time-Sharing Model with Many Queues", Operations Research, Vol.17, No.6, pp.1077-1089(1969).
- [ADW] J.Abate, H.Dubner and S.B.Weinberg: "Queueing Analysis of the IBM 2314 Disk Storage Facility", J.ACM, Vol.15, No.4, pp.577-589(1968-10).
- [B] P.J.Burke: "The Output of a Queueing System", Operations Research, Vol.4, No.6, pp.699-704(1956-12).
- [Be] V.E.Beněs: "General Stochastic Processes in the Theory of Queues", Addison-Wesley Pub. Co., Inc.(1963).
- [BHJ] E.Brockmeyer, H.L.Halstrøm and A.Jensen: "The Life and Works of A.K.Erlang", Transactions of the Danish Academy of Technical Science, No.2(1948).
- [Chg] W.Chang: "Queues with Feedback for Time-Sharing Computer System Analysis", Operations Research, Vol.16, No.2, pp.613-627(1968).
- [Chn] Wah-Cun Chan: "A Computer Processing Queueing System with Feedback", Information and Control, Vol.16, No.5, pp.473-486(1970-07).
- [Chu] W.W.Chu: "Buffer Behavior for Poisson Arrival and Multiple Synchronous Constant Outputs", IEEE Trans., Vol.C-19, No.6, pp.530-534(1970-06).
- [CK1] E.G.Coffman and L.Kleinrock: "Some Feedback Queueing Models for Time Shared System", 5th International Teletraffic Congress, pp.288-304, New York(1967).
- [CK2] ----- and ----- : "Feedback Queueing Models for Time-Shared Systems", J.ACM, Vol.15, No.4, pp.549-576(1968-10).
- [CK3] ----- and ----- : "Computer Scheduling Methods and Their Countermeasures", AFIPS SJCC, pp.11-21(1968).
- [CKW] D.Chazan, A.G.Konheim and B.Weiss: "A Note on Time-Sharing", J.Combinatorial Theory, Vol.5, No.4, pp.344-369(1969-12).
- [Cof1] E.G.Coffman, Jr.: "Stochastic Models of Multiple and Time-Shared Computer Operations", Univ. of California, Report No.66-38(1966-06).
- [Cof2] ----- : "Analysis of Two Time-Sharing Algorithms Designed for Limited Swapping", J.ACM, Vol.15, No.3, pp.341-353(1968-07).
- [Cof3] ----- : "Markov Chain Analysis of Multiprogrammed Computer Systems", Naval Res.Log.Quart., Vol.16, No.2, pp.175-197(1969).
- [Cof4] ----- : "Analysis of a Drum Input/Output Queue under Scheduled Operation in a Paged Computer System", J.ACM, Vol.16, No.1, pp.73-90(1969-01).
- [Coh] J.W.Cohen: "On Memory Unit with Finite Capacity", 6th International Teletraffic Congress, 321(1970).

- [Cox] D.R.Cox: "The Analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables", Proc. the Cambridge Phil.Soc., Vol.51, Part 3, pp.433-441 (1955-07).
- [Cr1] C.D.Crommelin: "Delay Probability Formulae When the Holding Times are Constant", P.O.Elec.Engrs.J., Vol.25, pp.41-50(1932-04).
- [Cr2] -----: "Delay Probability Formulae", P.O.Elec. Engrs.J., Vol.26, pp.266-274(1934-01).
- [D] R.Descamps: "Calcul direct des probabilités d'attente dans une file", Rev.franç.recherche operationelle, Vol.3, No.2, pp.88-100(1959).
- [En] E.G.Enns: "Some Waiting-Time Distributions for Queues with Multiple Feedback and Priorities", Operations Research, Vol.17, No.3, pp.519-525(1969-05).
- [Fa] A.J.Fabens: "The Solution of Queueing and Inventory Models by Semi-Markov Processes", J.Roy.Statist.Soc., Ser.B, Vol.23, pp.113-127(1961).
- [FG1] 藤木正也, 雁部頼一: "優先権のある多段帰還待合せ方式の条件つき待ち時間の解析", 研究実用化報告, Vol. 17, No.12, pp.2751-2775(1968-12).
- [FG2] -----, -----: "優先権のある多段帰還方式の条件つき待ち時間", 信学論(C), Vol.52-C, No.1, pp.25-32(1969-01).
- [FG3] M.Fujiki and E.Gambe: "Analysis of Conditional Waiting Time on a Multi-Level Feedback Priority Queueing Model", Rev. of the Electrical Comm.Lab., Vol.17, No.8, pp.839-865 (1969-08).
- [Fi] P.D.Finch: "On the Distribution of Queue Size in Queueing Problems", Acta Math.Sci.Acad.Hung., Vol.10, pp.327-336(1959).
- [Fu1] 福田 治郎: "TSSに関連する待ち行列について"日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会, pp.9-10(1968-05).
- [Fu2] -----: "TSSに関連する待ち行列について(第2報)", 日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会, pp.7-8,(1968-11).
- [Fu3] -----: "TSSに関連する待ち行列について(Ⅲ)", 日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会, pp.49-50(1969-05).
- [Fu4] -----: "FB型TSSに関する待ち行列について(つづき)", 日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会, pp.7-8(1969-10).
- [G] H.Gumbel: "Waiting Lines with Heterogeneous Servers", Operations Research, Vol.8, No.4, pp.504-511(1960-07).
- [Has1] 橋田温: "端末制御における Multiqueue の問題 (Polling 方式)", 通研経過資料第 2841 号 (1968-06).
- [Has2] -----: "データ通信におけるバッファメモリのトラヒック問題", 通研経過資料第 3233 号 (1969-06).
- [He] J.C.Heffer: "Steady-State Solution of the $M/E_k/c(\infty, \text{FIFO})$ Queueing System", J.Canadian Operational Research Soc., Vol.7, No.1, pp.16-30(1969-03).
- [H0] 橋田温, 大原邦武: "通信制御装置の処理能力", 通研経過資料第 3806 号 (1970-11).
- [Ho] 細川孝行: "Single Processor Computer Shared 待ち行列モデルにおける単純マルコフ連鎖", 信学論(C), Vol.52-C, No.7, pp.433-434(1969-07).
- [II] 伊藤正彦: "優先権を持つラウンドロビン方式の解析", 信学論(C), Vol.52-C, No.11, pp.720-726(1969-11).

- [I2] -----: “優先権を持つラウンドロビン方式の解析”, 研究実用化報告, Vol.19, No.6, pp.1137-1150(1970-06).
- [I3] -----: “データ通信方式におけるチャンネルバッファ容量の解析”, 昭45信学会全大951 (1970-08).
- [INY] 伊藤正彦, 中村義作, 吉田裕: “データ通信方式におけるチャンネルバッファ容量に対する解析”, 通研成果報告第5053号 (1970-02).
- [Kaw] 川島幸之助: “系内呼数に制限のある Foreground-Background 方式”, 昭45信学会全大948 (1970-08).
- [KAH] 金田悠紀夫, 相磯秀夫, 渕一博: “ETSS における擬似ページ・アドレス方式とその効率”, 信学論(C), Vol.52-C, No.5, pp.267-273(1969-05).
- [Kan1] 金田悠紀夫: “タイムシェアリングシステムのシミュレーション”, 信学論(C), Vol.53-C, No.2, pp.119-125(1970-02).
- [Kan2] -----: “TSS におけるページングの効率について”, 信学論(C), Vol.53-C, No.8, pp.538-545(1970-08).
- [Kann] 菅野文友: “信頼度構成”, 信学誌, Vol.52, No.4, データ通信特集号, pp.451-454(1969-04).
- [Ki1] J.F.C.Kingman: “The Heavy Traffic Approximation in the Theory of Queues”, Proc.Symposium on Congestion Theory, Univ. North Carolina Press, p.137(1965).
- [Ki2] -----: “Inequalities in the Theory of Queues”, J.Roy.Statist.Soc., Ser.B, Vol.32, No.1, pp.102-110(1970).
- [KII] 楠菊信, 飯田麒一郎, 伊藤興史郎: “DEX-2号交換機中央制御装置の構成”, 研究実用化報告, Vol.18, No.10, pp.2513-2528(1969-10).
- [KI1] L.Kleinrock: “Analysis of a Time-Shared Processor”, Naval Res.Log.Quart., Vol.11, No.1, pp.59-73(1964).
- [KI2] -----: “Analysis of a Time-Shared Processor”, Operations Research, Vol.11, No.1, pp.59-73(1964-03).
- [KI3] -----: “Time-Shared Systems: A Theoretical Treatment”, J.ACM, Vol.14, No.2, pp.242-261(1967-04).
- [KI4] -----: “Swap-Time Considerations in Time-Shared Systems”, IEEE Trans., Vol.C-19, No.6, pp.534-540(1970-06).
- [Ko] A.L.Konheim: “A Note on Time Sharing with Preferred Customers”, Z.Wahrscheinlichkeit., Vol.9, pp.112-130(1968).
- [KW1] J.Kiefer and J.Wolfowitz: “On the Theory of Queues with Many Servers”, Trans.Am. Math.Soc., Vol.78, pp.1-18(1955).
- [KW2] ----- and -----: “On the Characteristics of the General Queueing Process, with Applications to Random Walk”, Ann.Math.Statist., Vol.27, No.1, pp.147-161(1956-03).
- [KY1] 川島幸之助, 吉田裕: “多段帰還方式の系内呼数の偏差”, 通研成果報告第5048号 (1970-02).
- [KY2] -----, -----: “多段帰還方式の系内呼数に関する考察”, 昭45 電気四学会連大 2571(1970-04).
- [L] J.D.C.Little: “A Proof for the Queuing Formula: $L = \lambda W$ ”, Operations Research, Vol.9, No.3, pp.383-387(1951-05).
- [Mak] 牧野都治: “多重窓口での待行列”, 経営科学, Vol.4, No.3, pp.153-164(1961-02).

- [MMc] J.O.Mayhugh and R.E.McCormick: "Steady State Solution of the Queue $M/E_k/r$ ", Management Science, Vol.14, No.11, pp.692-712(1968).
- [Mo] H.Morimura: "On the Relation between the Distributions of the Queue Size and the Waiting Time", Kodai Math.Sem.Rep., Vol.14, pp.6-19(1962).
- [Mon] C.E.Montagnon: "Mean Response Times in Accessing a Time-Sharing Computer", Operational Research Quart., Vol.20, No.4, pp.477-487(1969-12).
- [Mu] 村尾洋: "M/G/2 Discrete Time Queue に関する一考察", 日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会, pp. 5-6 (1969-10); 同学会春季研究発表会, pp.19-20(1970-06).
- [N] 中村義作: "会話形処理モデルのトラヒック的解析", 信学論(C), Vol.53-C, No.9, pp.660-667(1970-09).
- [NMIH] 中村義作, 村尾洋, 伊藤正彦, 橋田温: "ファイルメモリのデータ授受に関するトラヒック的解析", 通研成果報告第4931号(1969-11).
- [NMT1] 中村義作, 村尾洋, 塚本克治: "ラウンドロビン方式の待ち時間分布に対する解析", 信学論(C), Vol.52-C, No.1, pp.48-55(1969-01).
- [NMT2] -----, -----, -----: "TSSのラウンド・ロビン方式の解析", 研究実用化報告, Vol.18, No.3, pp.639-655(1969-03).
- [Po1] F.Pollaczek: "Sur une generalisation de la théorie des attentes", C.R.Acad.Sci.Paris, Vol.236, pp.578-580(1953).
- [Po2] -----: "Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente", Mémorial de Science Mathématiques, fasc.150, Gauthier-Villars, Paris(1961).
- [Ri] J.Riordan: "Stochastic Service Systems", John Wiley & Sons, Inc.(1962).
- [S1] T.L.Saaty: "Time-Dependent Solution of the Many-Server Poisson Queue", Operations Research, Vol.8, No.6, pp.755-772(1960-11).
- [S2] -----: "Elements of Queueing Theory with Applications", p.203, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York(1961).
- [Sc] A.L.Scherr: "An Analysis of Time-Shared Computer Systems", M.I.T.Press, Cambridge, Mass.(1967).
- [Sch1] L.E.Schrage: "The Queue M/G/1 with Feedback to Lower Priority Queues", Management Science, Vol.13, No.7, pp.466-474(1967-03).
- [Sch2] -----: "Analysis and Optimization of a Queueing Model of a Real-Time Computer Control System", IEEE Trans., Vol.C-18, No.11, pp.997-1003(1969-11).
- [SN0] 坂田真人, 野口正一, 大泉充郎: "タイムシェアリングシステムのラウンドロビン方式について", 信学論(C), Vol.51-C, No.9, pp.409-416(1968-09).
- [STN0] 坂田真人, 富田真吾, 野口正一, 大泉充郎: "タイムシェアリングシステムにおける優先権による多段処理方式について", 信学論(C), Vol.51-C, No.8, pp.359-366(1968-08).
- [Ta1] L.Takács: "Introduction to the Theory of Queues", Oxford Univ.Press, New York(1962).
- [Ta2] -----: "The Stochastic Law of the Busy Period for a Single Server Queue with Poisson Input", J.Math.Analysis and Appl., Vol.6, No.1, pp.33-42(1963-02).
- [Ta3] -----: "A Single-Server Queue with Feedback", Bell Sys.Tech.J., Vol.42, No.2, pp.505-519(1963-03).

- [Ta4] ----- : "The Distribution of the Virtual Waiting Time for a Single-Server Queue with Poisson Input and General Service Times", Operations Research, Vol.11, No.2, pp.261-264 (1963-04).
- [Ta5] ----- : "Occupation Time Problems in the Theory of Queues", Operations Research, Vol.12, No.5, pp.753-768(1964-09).
- [Tan1] 田中穂積 : " 循環待ち行列モデルを用いた多重プログラミングシステムの解析 ", 信学論 (C) , Vol.53-C, No.2, pp.57-64(1970-02).
- [Tan2] ----- : " 並列循環待ち行列を用いたオンラインシステムの解析 ", 信学論 (C) , Vol.53-C, No.10, pp.756-764(1970-10).
- [TN1] 塚本克治, 中村義作 : " TSS のラウンドロビン方式に対する系内ジョブ数の解析 ", 経営科学, Vol.12, No.4, pp.213-225(1969-08).
- [TN2] ----- , ----- : " TSS のラウンド・ロビン方式に対する系内呼数の解析 ", 研究実用化報告, Vol.19, No.6, pp.1231-1243(1970-06).
- [Y1] 吉田 裕 : " 優先権のある多段帰還方式の系内呼数の解析 ", 通研成果報告第 4 6 0 8 号 (1969-06).
- [Y2] ----- : " 多段帰還方式の系内呼数の解析 ", 昭 4 4 信学会全大 1 4 6 (1969-09).
- [Y3] ----- : " 優先権のある多段帰還方式の平均特性 ", 通研成果報告第 4 7 9 5 号 (1969-09).
- [Y4] ----- : " 多段帰還方式の系内呼数の解析 ", 信学論 (A) , Vol.53-A, No.6, pp.290-297(1970-06).
- [Y5] ----- : " 複数処理装置におけるトラヒック問題 ", 昭 4 5 信学会全大 1 1 0 1 (1970-08).
- [Y6] ----- : " 帰還遅れのある帰還方式に関する解析 —— ラウンドロビン形の場合 ", 通研成果報告第 5 4 2 9 号 (1970-09).
- [Y7] ----- : " 複数処理装置による会話形処理モデルの解析について ", 信学論 (C) , Vol.53-C, No.10, pp.779-780(1970-10).
- [Y8] ----- : " 複数処理装置における動作時間と待ち時間 ", 通研成果報告第 5 6 0 2 号 (1970-12).
- [Y9] ----- : " 複数処理装置における動作時間と待ち時間 ", 信学論 (A) 投稿中 .
- [Y10] ----- : " マルチプロセッサによる会話形処理モデルの解析 ", 研究実用化報告, Vol.20, No.4(1971-04). に掲載予定。
- [YK] 吉田 裕, 川島幸之助 : " 多段帰還方式の系内呼数の解析 ", 研究実用化報告, Vol.19, No.6, pp.1151-1165(1970-06).
- [Hom] 本間鶴千代 : " 待ち行列の理論 ", 理工学社 (1966).